Test č. 9

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2004-2005

Zborcené plochy

Při vypracování úloh se využijí následující poučky:

a) u plochy jednodílného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu je každá přímka jednoho systému přímek protínána všemi přímkami druhého systému přímek;
b) v každém bodě těchto ploch se kříží dvě různoběžné tvořící přímky plochy (jsou z opačných systémů přímek) a tyto různoběžky určují tečnou rovinu plochy s dotykovým bodem v jejich průsečíku;
c) při pohybu dotykového bodu tečné roviny po jedné z tvořících přímek se postupně tečná rovina okolo takové přímky otáčí (Chaslesův korespondenční princip, viz Š. Holáň, DG III. díl, str. 37. a J. Vala, DG II. díl, str 99).

(1) Vypište zde všechny 3 možnosti, jakými útvary (kolika přímkami, rovinami) může být zadána zborcená plocha *hyperbolického paraboloidu*.
a)

b)

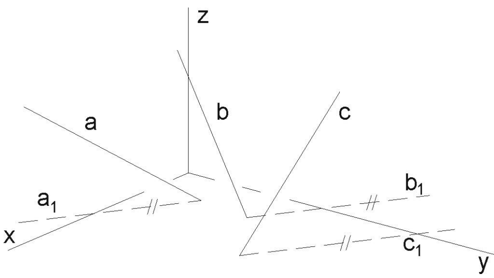
c)

(2) Jakou vzájemnou polohu mají mezi sebou tvořící přímky jednoho systému na *jednodílném hyperboloidu*. Kolika tvořícími přímkami je tato plocha určena?

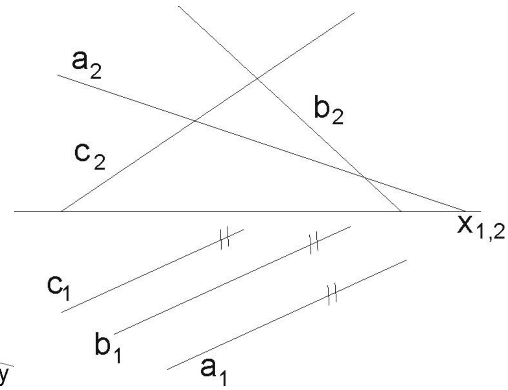
(3) Co je to Chaslesův korespondenční princip, vypište slovy:

(4) Jakou vzájemnou polohu zaujímají tyto tři přímky a, b, c v axonometrickém zobrazení, podle obr.4 a), c) a dále v Mongeově projekci, podle obr. b) ?

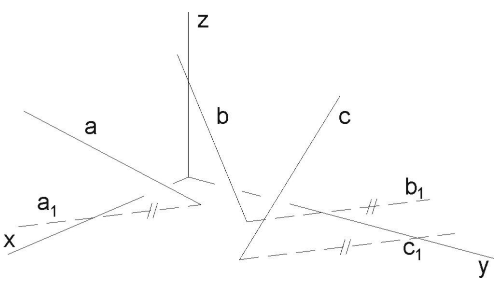
Návod: Jsou-li 3 přímky rovnoběžné (každá přímka zvláště) s jistou rovinou, (ale mezi sebou zůstávají vzájemně mimoběžné), pak určují hyperbolický paraboloid. Takovou polohu mimoběžek nazýváme „*komplanární*“.



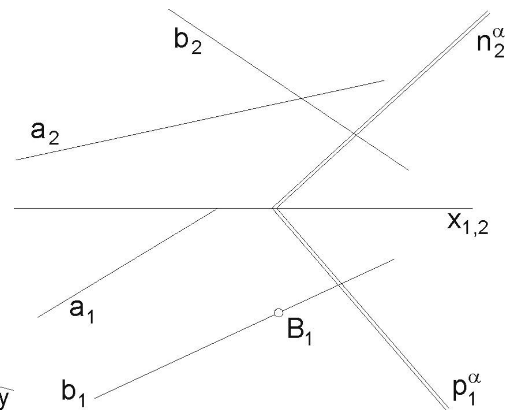
Obr. 4a



Obr. 4b



Obr. 4c



Obr. 5

(5) Zborcená plocha je určena řídicí rovinou α a mimoběžkami a, b, podle obr. 5). Připište zde název této plochy. Dále sestrojte v bodě B tečnou rovinu τ, která se dotýká plochy právě v bodě B.

Návod: tečná rovina je tvořena přímkou b a přímkou z druhého (opačného) systému, zpravidla tedy čárkovanou. Dále platí: jsou-li dány dvě mimoběžné přímky plochy a řídicí rovina, pak přímky *druhého* systému (tudíž čárkované a v obr. nezadané), musí být rovnoběžné s danou řídicí rovinou.

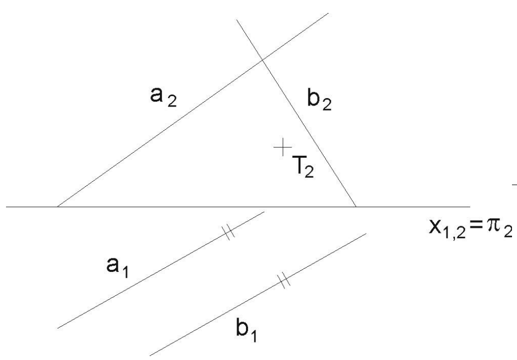
Poznámka: zadaná řídicí rovina je tam kvůli možnosti tvořit přímky druhého, čárkovaného systému. V podstatě nahrazuje třetí přímku, která je nevlastní. Všechny přímky druhého regulu musí tuto nevlastní přímku protnout. Z toho plyne, že jsou rovnoběžné s řídicí rovinou. Kdyby totiž byla chybně zadána řídicí rovina, patřící k systému přímek a,b, zborcená plocha by nebyla dostatečně zadána.
Řídicí rovinu, patřící k systému přímek a,b si sami kdykoli můžeme odvodit: zvolíme v prostoru pevný bod a v něm vedeme po jedné rovnoběžce s každou ze zadaných

mimoběžek a,b. Tyto nové přímky jsou mezi sebou různoběžné a určují rovinu, které říkáme „ řídicí“.

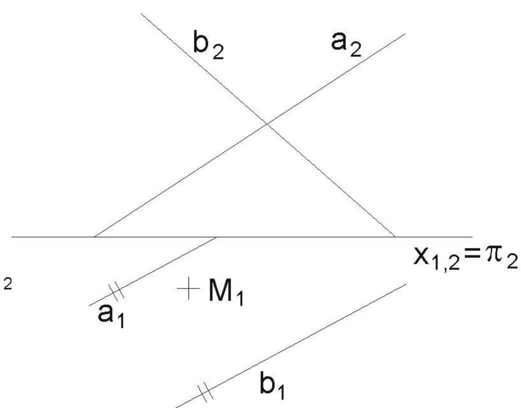
Jde tedy o to, vést bodem B přímku druhého (čárkovaného) systému, ale rovoběžně s řídicí rovinou α. Bodem B vedeme posunutou rovinu $\alpha' \parallel \alpha$ (zavedením hlavní přímky nové roviny α' některé osnovy bodem B). Po sestrojení stop nové roviny α', najdeme průsečík A druhé přímky a s rovinou α'. AB je přímka g čárkovaného systému, přímka je rovnoběžná s rovinou α. Takže nyní máme dvě různoběžky, protínající se v bodě B. Tím úkol končí. Pokud by bylo požadováno *„sestrojit v bodě B tečnou rovinu“*, byla by už tvořena těmito různoběžkami $\tau = b.g'$.

(6) Hyperbolický paraboloid je zadán průměty dvou mimoběžek a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), při čemž je $a_1 \parallel b_1$. Dále je dán T_2 bodu T, který leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys T_1 a přímky obou systémů procházejících bodem T. Podle obr. 6.

Návod: vedeme bodem T_2 přímku g' druhého systému, rovnoběžnou s řídicí rovinou π, takže g'_2 je rovnoběžná se základnicí. Odvodíme pomocí jejích průsečíků s přímkami a,b také půdorys g'_1 a na ordinále T_1. Bodem T procházejí po jedné přímce g' a c z každého systému. Přímku c_1 máme ihned: když $a_1 \parallel b_1$ je i $c_1 \parallel a_1 \parallel b_1$ (kvůli komplanaci u HP). Dále připravíme ještě nejméně jednu přímku m' - čárkovanou ($\parallel \pi$), např. ležící přímo v π (tzn., že $m'_2 = x_{12}$ a m'_1 půjde spojnici půdorysných stopníků přímek a,b). Odvodíme nárys průsečíku m' a c – P_2^c a jeho propojením s bodem T_2 získáváme nárys přímky c_2.



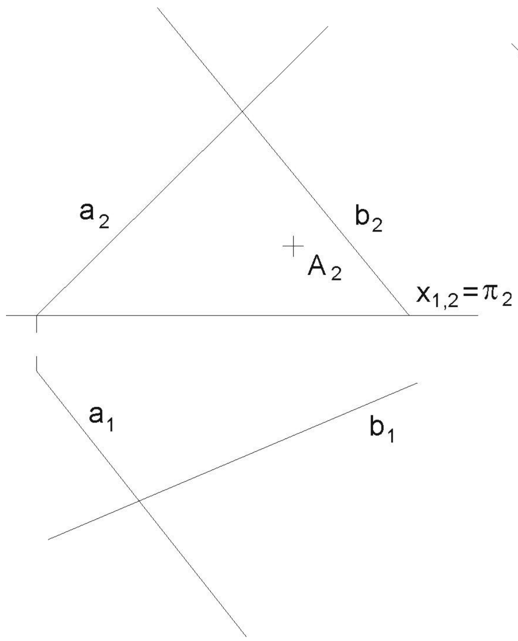
Obr. 6



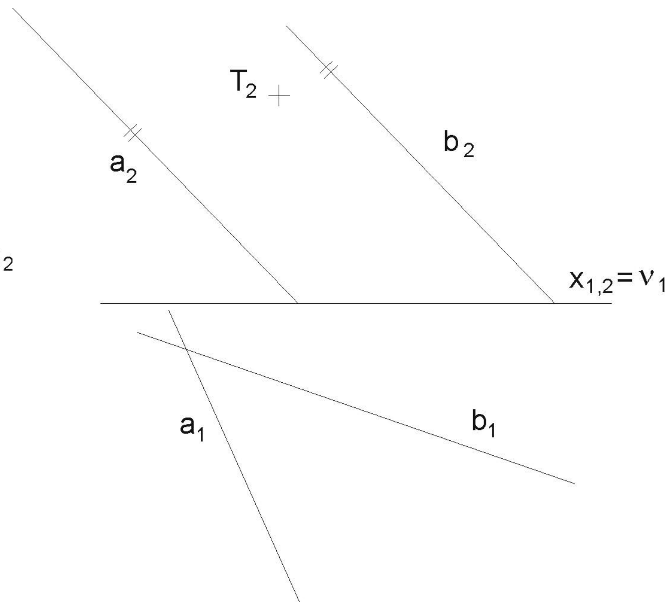
Obr. 7

(7) Hyperbolický paraboloid je určen mimoběžkami a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), podle obr.7. Přitom $a_1 \parallel b_1$. Odvoďte nárys bodu M_2, leží-li M na ploše, a je zadán jen svým půdorysem M_1.

Návod: postupujeme podobně jako v 6.př.: nejdříve připravíme c_1, $M_1 \in c_1 \parallel b_1$. Dále v nárysе narýsujeme aspoň dvě přímky čárkované a odvodíme je do půdorysu. Vyhledáme v půdoryse dva průsečíky přímky c_1 s čárkovanými přímkami. Odvodíme tyto dva průsečíky do nárysu na čárkované přímky. Propojením těchto průsečíků v nárysе získáme i přímku c_2 a na ordinále bod M_2.



Obr. 8



Obr. 9

(8) Hyperbolický paraboloid je zde, podle obr. 8, zadán obecně: mimoběžky a, b, (které už nemají rovnoběžné první průměty) a řídicí rovinou π. Najděte půdorys bodu A, ležícího na ploše, je-li dán jeho nárys, a sestrojte tečnou rovinu v tomto bodě.

Návod: zavedeme bodem A_2 čárkovanou přímku g_2' rovnoběžnou se základnicí ($\parallel \pi$) a odvodíme její půdorys včetně půdorysu bodu A_1. S přímkou $A \in c$ to bude však složitější: její půdorys nemůžeme dokonce ani odhadnout (komplanace přímek a, b, c na ploše hyperbolického paraboloidu - i když v prostoru určitě existuje - v prvním průmětu je zastřena). Pomůžeme si jistou grafickou „lstí“ (je užívána i v literatuře a bez ní to ani nejde): na ploše tedy existují nyní vodorovné čárkované přímky (díky tomu, že π je jejich řídicí rovina). Jedna z čárkovaných přímek je sice vodorovná, ale navíc také kolmá k nárysně, nazveme ji $r' \perp \nu$. Stále - i zde - platí obecná věta: „*Všechny přímky nečárkovaného systému jsou protínány zase přímkami systému čárkovaného*“.Tato přímka r' proto nutně protíná přímky a, b (protože vzhledem k nim patří do opačného systému). Protože ale $r' \perp \nu$, jeví se v nárysе jen jako bod r_2'. Oba průsečíky přímek a, b s přímkou r' ačkoli jsou od sebe různé, v nárysе se promítají do jediného bodu r'_2. Ten tedy musí být společným průsečíkem nárysů a_2, b_2.

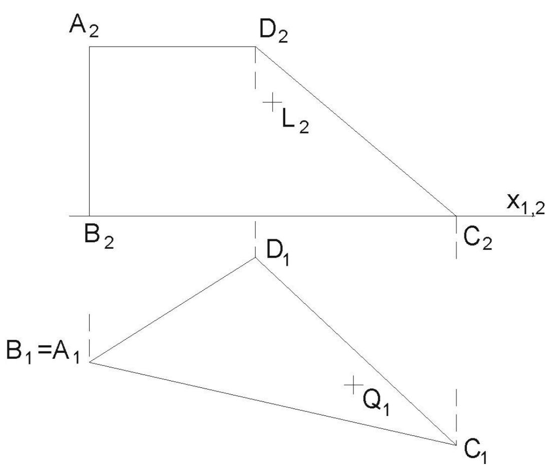
Dále platí, že i přímka c (procházející bodem A) musí protínat přímku r' a její nárys proto musí procházet také bodem r'_2, tedy $c_2 = r'_2.A_2$. Nárys přímky c již máme. Známe-li alespoň dvě čárkované přímky q', p', můžeme půdorys přímky c odvodit s jejích pomocí.

V bodě A se kříží přímky c a g'. Tyto přímky určují tečnou rovinu τ s bodem dotyku A s plochou. Najděte i stopy tečné roviny τ.

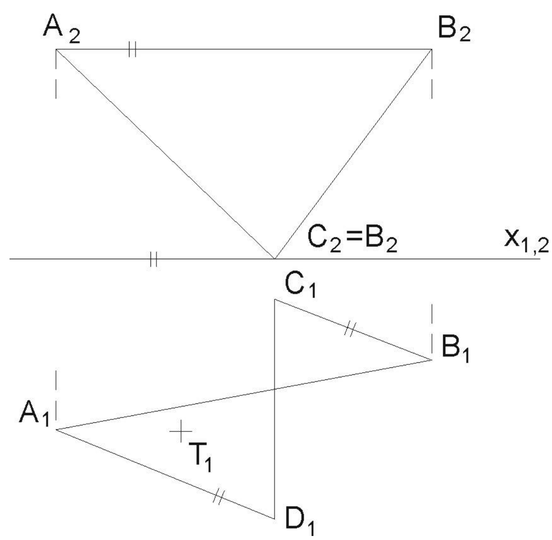
(9) V obr. 9 je zadání hyperbolického paraboloidu trochu převrácené. Řídicí rovinou je nárysna ν a nárysy přímek a, b jsou spolu rovnoběžné. Dále je dán nárys bodu T. Odvoďte jeho půdorys a stopy tečné roviny pro tento dotykový bod T. Podrobný popis už neuvádíme, student by se měl postup odvodit a aplikovat kroky podle předcházejících úloh.

(10) V obr. 10 je plocha hyperbolického paraboloidu určena zborceným čtyřúhelníkem A, B, C, D. Body L a Q leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys bodu L a chybějící nárys bodu Q.

Návod: vyzkoumejte polohy řídicích rovin a z toho vyplývající zákonitost pro průměty tvořících přímek obou systémů. Potom už snadno zavedete danými průměty bodů jednotlivé průměty tvořících přímek a k těmto průmětům pak přiřadíte i chybějící průměty přímek.



Obr. 10

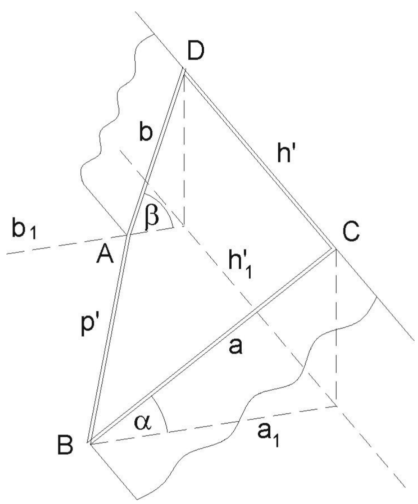


Obr. 11

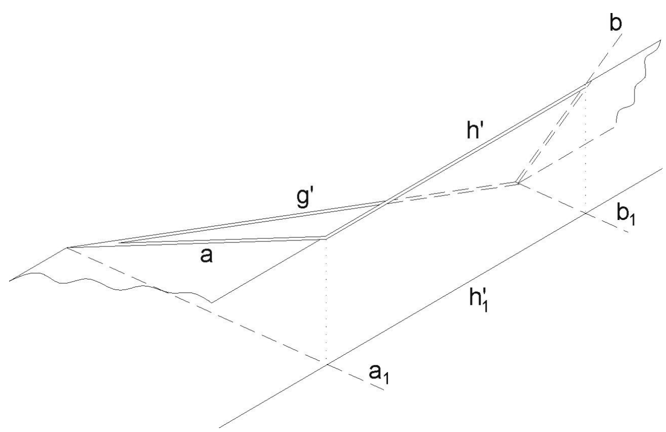
(11) V obr. 11 si důsledně všímejte, že u zborceného čtyřúhelníka jsou strany AB a CD spolu v prvním průmětu rovnoběžné! Máte odvodit chybějící průmět bodu T, ležícího na ploše. Jistě to dokážete sami.

Zde končí základní úlohy na hyperbolický paraboloid a poučky, uvedené v úvodu. Další příklady jsou již aplikace, v principu použitelné ve stavebnictví.

(12) V obr.12 je dána v axonometrii přechodová plocha *hyperbolického paraboloidu*, propojující dva profily různých sklonů a a b. Máte sestrojit 8 tvořících přímek každého systému. Podotýkáme, že další stavební uplatnění, tomuto blízké, můžeme nalézt při zastřešení, jsou-li vodorovný hřeben a okapová hrana ve vzájemně mimoběžné poloze.



Obr. 12



Obr. 13

(13) Stejný úkol Vás čeká v obr. 13. Jde jen o jiný axonometrický pohled na tuto přechodovou plochu, tvořenou zborceným (prostorovým) čtyřúhelníkem, jehož strany leží na přímkách, popsaných takto: nakloněné a, b, vodorovná g' je v půdorysně a h' je vodorovná, ale horní strana. U plochy takto natočené vzhledem k pozorovateli získáme navíc i křivku axonometrického obrysu (tou bude parabola, jako obalová křivka axonometrických průmětů tvořících přímek). Váš úkol bude vybrat jednu tvořící přímku a konstruktivně najít na jejím axon. průmětu dotykový bod s obrysovou čarou (obrysový bod, bod přechodu viditelnosti).

Návod: Užijete vlastnosti, že každou tvořící přímkou plochy prochází nekonečně mnoho tečných rovin a každá má svůj dotykový bod na jiném místě takové přímky (při postupu dotykového bodu po tvořící přímce se postupně také otáčí okolo tvořící přímky i příslušná tečná rovina = Chaslesův princip).

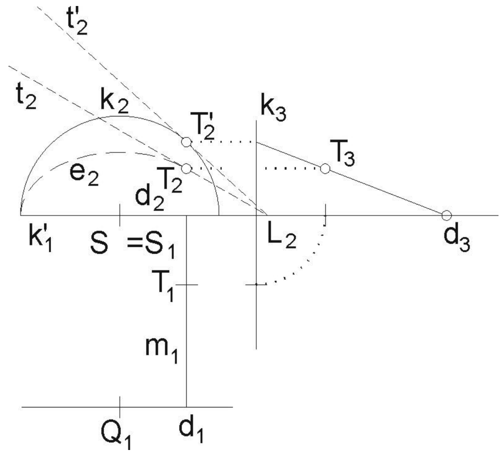
Z promítacích metod víme, že prochází-li tečná rovina právě okem pozorovatele, je vzhledem k pozorovateli v tzv. „*promítací poloze*“. Protože tečná rovina prochází přímkou, bude dotykový bod tečné roviny ležet na tvořící přímce. Dotykový bod se bude jevit jako bod přechodu a změny viditelnosti. Bude se jevit jako obrysový bod, ve kterém průmět tvořící přímky se dotýká obrysové čáry a proto mění svou viditelnost a průmět pak pokračuje jako neviditelný.

Jak to prakticky provedeme? Označme v obr. přímky skloněné k půdorysně jako nečárkované a vodorovné budou naopak čárkované a hned dvě z nich, tj. strany čtyřúhelníka označme dolní g' a horní h'. Vyberme potom některou tvořící, např. čárkovanou, vodorovnou přímku m', ležící mezi přímkami g' a h'.

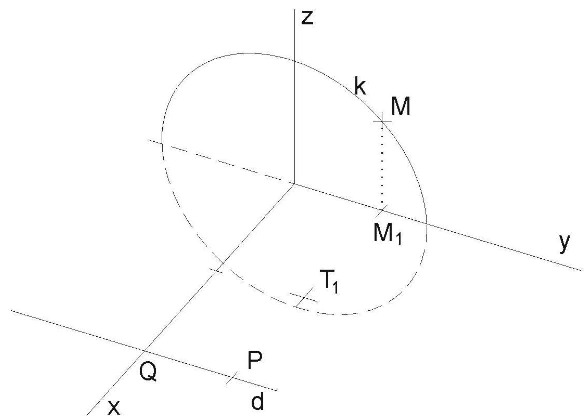
Pro vyhledání bodu přechodu viditelnosti na přímce m' musíme uvážit, že přímka m' je také průmětem tečné roviny (v promítací poloze, procházející okem pozorovatele) a tedy současně i průmětem další přímky c z opačného systému - nečárkované a nakloněné, právě také ležící v této tečné rovině. Nyní se zaměříme na tuto nečárkovanou přímku c. Představíme si, že c protíná např. vodorovné přímky g' v bodě P a přímku h' v bodě H. Máme nyní dvě různoběžky c a m', vzájemně se (vzhledem k pozorovateli) zakrývající. Doplníme ještě půdorysy přímek c a m'. Přímka c_1 je dána body $P = P_1$ a H_1 (pomocí průsečíků P přímky c na straně g' a pomoci průsečíku H přímky c na straně h') a m'_1 pomocí průsečíků přímky m' se stranou b a se stranou a, takže u všech těchto průsečíků odvodíme ordinálami jejich půdorysy. Propojením P s půdorysem H_1 obdržíme půdorys c_1 a u něj dbejme, aby byl rovnoběžný s $a_1 \parallel b_1$. Pro kontrolu přesnosti je užitečné si uvědomit, že půdorys přímky m'_1 musí směřovat do průsečíku půdorysů přímek p'_1 a h'_1, jde o obdobu z úlohy 8. Půdorysy přímek m' a c se kříží v půdoryse dotykového bodu T. Ordinálou odvodíme nahoru na přímku $m' = c$, tedy na společný axonometrický průmět přímek m' a c definitivně i bod T. Toto je obrysový bod.

(14) Podle obr. 14b je zadán v kolmé axonometrii (axon. trojúhelník volte sami) *kruhový konoid* a je ještě připojen informační obrázek v Mongeově projekci (také viz J.Vala, DG II., str.97. a Š.Holáň, DG III., str.43). Řídící kružnice k leží v souřadnicové rovině $y.z$, má střed S v počátku a poloměr $r = 30$, řídící přímka d prochází bodem $Q[50, 0, 0]$ a je rovnoběžná s osou y, řídící rovinou konoidu je nárysna $x.z$. Je dán ještě půdorys $T_1[25, 20, ?]$ bodu T, ležícího na ploše.

a) Odvoďte bod T (užitím tvořící přímky m plochy).
b) Sestrojte řez e rovinou $\alpha \in T$, $\alpha \parallel y.z$. V bodě T sestrojte konstruktivně tečnu křivky e řezu.
c) Dále sestrojte řez vertikální rovinou λ, volenou bodem T, ale různoběžnou se souřadnicovými rovinami.
d) Sestrojte tečnu v obecném bodě řezu rovinou λ.



Obr. 14a

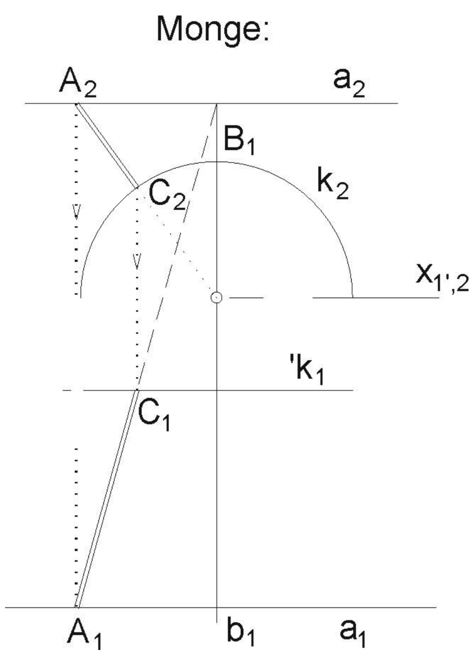


Obr. 14b

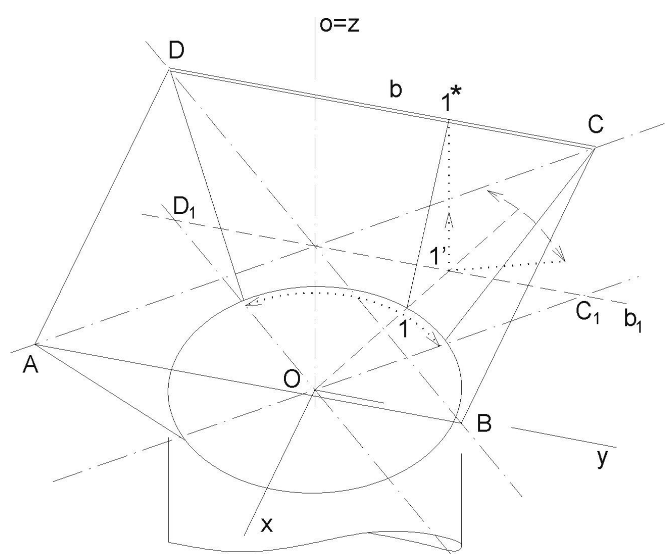
Návod:
ad a) tvořící přímka m konoidu bude rovnoběžná s řídící rovinou $x.z$. Proto její půdorys m_1 bude procházet daným půdorysem T_1, rovnoběžně s osou x. Průsečík m_1 s půdorysem k_1 (na ose y) kružnice k označme M_1. Ordinálou odvodíme na kružnici nahoru bod M. Půdorys m_1 také protíná i řídící přímku d v bodě P (d a P leží v půdorysně). Propojením $m = PM$ získáme tvořící přímku m. Ordinálou z půdorysu T_1 odvodíme na přímku m bod T.
ad b) pro křivku e řezu v rovině, rovnoběžné s bokorysnou $y.z$ platí, že 3.průmět křivky e_3 bude afinně sdružený s kružnicí $k = k_3$ a osou afinity bude osa y. Bod T_3 bude afinní k jistému bodu $T'_3 = M$ na kružnici (a na vertikále). V prostoru by šlo o kolmou afinitu. Připravíme-li např. nejdříve tečnu t' kružnice v bodě T'_3 a vyhledáme-li také průsečík L této tečny t' na ose afinity y, pak zpětně spojnice LT_3 je již afinní bokorys t_3 (tečny t elipsy). Samotná tečna t je v prostoru s bokorysnou rovnoběžná, protože leží ve svislé rovině $\alpha \parallel y.z$, $t \parallel t_3$. Tečnu t rýsujeme tedy jako rovnoběžku s průmětem t_3 bodem T. Dbejme však aby stopník P^t se promítal v 3.průmětu do bodu L ($P^t L \parallel x$). Spojnice obou stopníků je už stopa tečné roviny τ, $p^\tau = P^m P^t$.
ad c) křivku g řezu sestrojujeme postupně bodově, každý její bod jako průsečík jednotlivé tvořící přímky s rovinou řezu λ. Je to snadné, protože rovina λ je svislá. Označme na libovolné tvořící přímce q bod řezu Q (kdybychom použili přímku m, pak by bod Q se stal bodem T, takže pro přehlednost vybereme přímku q raději jinou). Tečna k řezu rovinou λ v bodě Q je průsečnicí roviny λ a tečné roviny plochy v bodě Q.
Metodou jako pro bod T můžeme v bodě Q sestrojit tečnou rovinu τ^Q (Hledání tečné roviny τ^Q je zdlouhavé a opakuje se vše v bodě Q jako pro bod T: tj. bodem Q zavedeme rovinu $\beta \parallel y.z$. Připojíme třetí průmět Q_3, uplatníme afinitu na kružnici k, najdeme afinní bod Q' , dale afinní vztah mezi tečnami v bodě Q' a v bodě Q_3.

Konečně doplníme o tečnu w v bodě Q (rovnoběžnou s $y.z$). Stopník P^w této tečny a stopník P^q tvořicí přímky q určují stopu p^σ tečné roviny σ s dotykovým bodem Q. Průsečík půdorysné stopy p^σ se stopou p^λ je už stopník P^c tečny c čáry řezu roviny λ. Spojnice půdorysného stopníku P^c a bodu Q je tečna c křivky řezu.

(15) Sestrojte v kolmé axonometrii, obr. 15, plochu násypky, tvořenou 4 díly (z nichž vždy dva a dva jsou symetrické) zborcené plochy *Montpellierského oblouku.* Každý takový díl je samostatně tvořen částí řídicí kružnice v půdorysně o středu v počátku, dále společnou řídicí přímkou $o = z$ a vodorovnou řídící přímkou např. b (na ni leží strana vodorovného obdélníka). Jedná se tedy o přechodovou (ale nerozvinutelnou, zborcenou) plochu, propojující vodorovný obdélník či čtverec (vodorovná dvířka) s kružnicí (tj. ukončující svislé násypné potrubí). Máme tedy 4 Montpellierské oblouky, vzájemně na sebe navazující. Omezení a navázání na sebe u jednotlivých Montpellierských oblouků je ve svislých rovinách, procházejících úhlopříčkami AC, BD vodorovného obdélníka. Vaším úkolem je vyrýsovat tvořící přímky zborcené plochy ve všech 4 dílech. Přitom v každém dílu vyrýsujte nejméně 5 přímek, včetně krajních.



Obr. 15a



Obr. 15b

Návod: Protože všechny tvořící přímky musí protínat i řídící přímku $o = z$ a ta je (v našem příkladu) kolmá k půdorysně, budou všechny půdorysy tvořících přímek procházet půdorysem přímky o, tedy počátkem. Budou proto prostými protahovanými průměry kružnice. Poznačíme si u nich očíslováním 1, 2, 3, ... průsečíky s kružnicí. V průsečících (obdobně očíslovaných $1'$, $2'$, $3'$, …) , kde tyto půdorysy tvořících přímek protínají půdorys b_1 strany b obdélníka, povedeme vertikálně ordinály na stranu b obdélníka. Tyto nové průsečíky očíslujeme 1^*, 2^*, 3^*, … Získáme tak systém čísel např.: $1 + 1' + 1^*$. Postupně propojujeme jednotlivě body 1 a 1^*, atd. a tak obdržíme tvořící přímku plochy. Neviditelné úseky čárkujeme.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „dodělat“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík
Mgr. Pavel Hon
Petr Koplík
Typeset by LaTeX