

## Test č. 7

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST,  
letní semestr 2001/2002

### Proniky rotačních ploch

Některé příklady jsou čerpány ze skript: Holáň Štěpán, Holáňová Libuše – Cvičení z deskriptivní geometrie III. – Plochy stavebně technické praxe, Fakulta stavební VUT, Brno 1992.

(1.př. zadán přímo; 2.př. str.34., cv.9.; 3.př. str.35., cv.14.; 4.př. je zadán přímo; 5.př. zadán přímo)

V Mongeově promítání - kladný směr osy  $x$  doprava.

- (1) Sestrojte hlavní meridián rotační plochy (tj. čáru skutečného obrysu vzhledem k nárysně), která vznikne rotací obecné prostorové křivky  $k$  (s koncovými body  $K, L$ ) okolo osy  $o$ , podle obr. 1. V některém bodě prostorové čáry sestrojte tečnou rovinu  $\tau$ , především její spádovou přímkou  $s^\tau$ , protínající osu rotace a půdorysnou stopu pt tečné roviny.
- (2) Sestrojte elipsu, která se dvakrát dotýká elipsy, určené: středem  $S(0; 0)$ , hlavní poloosou  $a = 50$  v ose  $x$ , vedlejší poloosou  $b = 35$  a prochází body  $A(-5; -28)$ ,  $B(13; 8)$ ,  $C(-37; 11)$ .

[ Úloha je z počátku formulovaná jako rovinná záležitost. Proto z počátku vynášíme jen podle dvou os  $x$  a  $y$ . Půdorys připojujeme teprve později jako pomocnou metodu.]

Návod: Danou elipsu považujte za hlavní meridián rotačního elipsoidu s osou rotace kolmou k půdorysně. Půdorysnu volte tak, aby celý elipsoid byl nad ní (tj. osu  $x_{1,2}$  pod elipsou). Půdorys  $o_1$  osy rotace volte dostatečně pod osou  $x_{1,2}$  tak, aby se oba průměty elipsoidu nepřekrývaly. Body  $A, B, C$  považujte za druhé průměty bodů na ploše elipsoidu (a nikoli uvnitř plochy). Má-li hledaná elipsa (je to rovinná křivka) procházet body  $A, B, C$ , bude ležet v jejich rovině  $\rho = ABC$ . Tyto tři body jsou však na povrchu daného elipsoidu, proto i hledaná elipsa je na povrchu a musí tudíž nutně být rovinným řezem daného elipsoidu (s tím, že body přechodu viditelnosti se stanou současně (v požadavku úlohy „...*dvakrát se dotýká elipsy*...“) dotykovými body dané a hledané elipsy.

Odvoďte za tohoto předpokladu půdorysy daných bodů: bodem, na př.  $A_2$  proložte kružnici (ležící na ploše elipsoidu a mající svůj střed na ose rotace.) Její poloměr

přenesete z 2. průmětu kružítkem do 1. průmětu. Uvědomte si, že 1. průmět na př. bodu  $A_1$  se odvodí ordinálou z bodu  $A_2$ . Avšak tato ordinála přitom nutně v obecném případě protne uvažovanou kružnici dvakrát. Vaším úkolem je vybrat pro další postup jen jednu polohu  $A_1$  (ze dvou možných poloh). Obdobně musíte vybrat ze dvou možností i bod  $B_1$  a  $C_1$ . V dalším považujte tyto body za vrcholy trojúhelníka a najděte za této podmínky napřed stopníky stran trojúhelníka a potom i stopy roviny  $\rho \equiv ABC$ .

Řešením tedy je průsek (rovinný řez) elipsoidu rovinou  $\rho$ . Uplatněte (nastudujte předem, např. str.23. Holář III)) všechny kroky, obvyklé při úloze „*rovinný řez rotační plochy*“, tj. body přechodu viditelnosti na křivce řezu vzhledem k nárýsně a vzhledem k půdorysně, nejvyšší bod  $M_2$  a nejnižší bod  $N_2$  křivky řezu). Vyrýsujte jen jedno z možných řešení (různost řešení je odvozena od voleb prvních průmětů bodů  $A_1, B_1, C_1$  ze vždy dvou možných poloh - viz nahoře).

V některém bodě  $A, B, C$  sestrojte tečnou rovinu  $\tau$  plochy elipsoidu a tečnu  $t$  řezu (jako průsečnici roviny řezu  $\rho$  a tečné roviny  $\tau$ .)

- (3) Sestrojte průnik rotačního kužele a plochy kulové, která se dotýká jednak kužele v bodě  $T[-10; ?; 66]$  a půdorysny. Kužel má podstavu v  $\rho$  o středu  $O[0; 53; 0]$  a poloměru  $r = 42$ , výška  $v = 100$ .

- Sestrojte tečnu průnikové křivky, dotýkající se křivky v jejím obecném bodě.
- Sestrojte také body přechodu viditelnosti průnikové čáry na obrysových povrchových přímkách kužele vzhledem k nárýsně.
- Sestrojte konečně i body přechodu viditelnosti na kružnici, která vytváří půdorysný obrys kulové plochy.

Návod: Nejdříve odvodíme 1.průmět  $T_1$  bodu  $T$  na povrchu kužele: proto v hladině  $z = 66$  zavedeme na kuželu kružnici, odvodíme její půdorys a ordinálou vybereme 1. průmět  $T_1$  (je to náročné na pečlivé rýsování). Doporučuji vybrat takovou polohu  $T_1$ , která je menší  $y$ -ovou souřadnici od osy  $x$  než střed  $O_1$ . Celá průniková čára bude v prostoru symetrická podle roviny  $\sigma$ , procházející body  $O, T$  kolmo ještě i k půdorysně. Určíme tedy rovinu  $\sigma_1 \equiv O_1T_1$ , (tj. přímkou  $\sigma_1$ ). Využijeme symetrie. Tuto rovinu sklopíme o pravý úhel do půdorysny a vytvoříme tak vlastně třetí průmět pro celý průnik. Povrchová přímka kužele se stane potom v třetím průmětu obrysovou přímkou kužele. Kulová plocha se v třetím průmětu zobrazí jako kružnice, dotýkající se osy sklápění  $x_{1,3} = \sigma_1 = \pi_3$ , tj. třetího průmětu půdorysny. Aby vůbec k průniku došlo, musí se kulová plcha dotýkat kužele tzv. „zevnitř“. Proto se zobrazí kulová plocha jako kružnice, dotýkající se takové povrchové přímky kužele, která prochází bodem  $T$ . Kružnice se dotkne povrchové přímky právě přesně v bodě  $T_3$ . Pro narýsování kružnice známe tedy tečnu s dotykovým bodem  $T_3$  a další tečnu  $\rho_3$ . (V dotykovém bodě  $T_3$  sestrojíme kolmici k této tečně. Dále sestrojíme kružítkem osu souměrnosti úhlu mezi těmito dvěma tečnami. Průsečík kolmice a symetrály je hledaný střed  $S_3$  kulové plochy). Ordinálou odvodíme 1. průmět  $S_1 \in \sigma_1$

a konečně i  $S_2$  (příčemž jeho  $z$ -ová výška se převezme z třetího průmětu). Poloměr kulové plochy je v prostoru vzdálenost  $ST$  a my ji vyčteme v třetím průmětu ve skutečné velikosti jako úsečku  $S_3T_3$ .

Protože koule má nekonečně mnoho os rotace, vybereme do úvah tu, která je rovnoběžná s osou kužele, čili osa koule bude kolmá k půdorysně (abychom měli pro pronik speciálně případ dvou rovnoběžných os rotace). Řešíme potom jako u soustavy s dvěma rovnoběžnými osami (ale od nárysny různě odsunutými, umístěnými s různými  $y$ -vými vzdálenostmi od nárysny). Zavádění vodorovných hladin začínáme v nárysu. Do 1. průmětu odvozujeme příslušné kružnice – vždy v hladině po jedné z každého tělesa. Takové kružnice se budou v 1. průmětu protínat už v bodech průnikové čáry. Tyto body odvodíme do nárysny a dáme pozor, abychom vybrali právě tu hladinu, ve které body vznikaly. Pokud se už kružnice v půdorysu neprotnou, znamená to, že jsme v oblasti, kde už není žádný bod průnikové čáry.

- Obrysové body průnikové čáry vzhledem k půdorysně vznikají jen na „rovníku“ kulové plochy. Proto uplatníme právě hladinu této kružnice a v ni obecnou metodou najdeme průnikové body. V náryse se stávají jen pomocnými, obecnými body a vhodně doplňují průnikovou čáru.
  - Obrysové body v nárysu rozdělíme na oddělené konstrukce pro nárys kužele a pro nárys kulové plochy. Hledáme je až po dostatečně přesném vyrýsování průnikové čáry (co nejvíce bodů)
- a) Nárysem kužele jsou dvě povrchové přímky (které v půdoryse se jeví jako rovnoběžka s osou  $x$ , vedená bodem  $V_1$ . Takže, kde v 1. průmětu tato rovnoběžka (= dvě povrchové přímky kužele v půdoryse) protne průnikovou křivku, tam jsou hledané body pro nárys. Proto ordinálou (případně za pomoci třetího průmětu) odvodíme jejich přesnou polohu v náryse.
- b) Nárysem kulové plochy je kružnice, jejíž rovina prochází středem  $S$  kulové plochy a sice rovnoběžně s nárysny. V půdoryse se jeví jen jako úsečka, rovnoběžná s osou  $x$ , jako průměr kulové plochy. Zase vyhledáme v půdoryse průsečíky tohoto průměru s půdorysem průnikové čáry a ordinálou odvodíme nárys těchto průsečíků na obrys kulové plochy (kontrolujeme  $z$ -ovou výšku s přihlédnutím ke třetímu průmětu).
- Nejvyšší bod  $M_3$  průnikové čáry je průsečíkem třetího průmětu kužele a kulové plochy, tedy přímky a kružnice. Leží v rovině souměrnosti  $\sigma_1$  a přesně ve třetí průmětně. V náryse je tečna průnikové čáry v tomto bodě  $M_2$  rovnoběžná s půdorysnou!
  - *Tečna průnikové čáry*: je průsečnicí dvou tečných rovin, dotýkajících se obou ploch v příslušném společném bodě průnikové čáry. Jedná se o samostatnou úlohu „*konstrukce tečné roviny*“ (str.22. Holář III) směřující až k vyhledání její půdorysné stopy. Vyhledání půdorysné stopy zde není možno (pro obsáhlost) popsat. Jakmile však najdeme obě půdorysné stopy  $p_1^\alpha$  a  $p_1^\beta$ , jejich průsečík  $P^t$  je už stopníkem hledané tečny. Takže jej stačí spojit s příslušným bodem  $X$

průnikové čáry a tak získáme tečnu  $t = P^t X$ . Tečnu k průnikové čáře je možné konstruovat také jako kolmici k rovině určené normálami k rotačním plochám v daném bodě.

- (4) Sestrojte průnikovou křivku dvou rotačních ploch válcových, jejichž osy se protínají pod úhlem  $60^\circ$  a osy jsou přitom rovnoběžné s nárysnou. Rotační plochy válcové mají poloměr  $r = 30$  s osou svislou a poloměr  $r' = 25mm$  s osou nakloněnou. Sestrojte tečnu v obecném bodě průnikové čáry. Připojte i půdorys těchto válců a vyznačte v něm také průnikovou křivku s tečnou. (*Pro průnik použijte metodu soustředných pomocných kulových ploch. Pro tečnu použijte metodu normálových rovin.*) Obr.2 je jen orientační, zmenšený. Rýsujte podle údajů.
- (5) Sestrojte průnik rotačního válce s rotačním kuželem, jejichž osy se protínají a leží v nárysně. Rotační válec má svislou osu  $^1o$ , procházející bodem  $Q[0, 0, 0]$  a poloměr  $r = 30$ , rotační kužel má osu  $^2o = VS$  odkloněnou asi o  $60^\circ$  od osy svislé, vrchol kužele  $V[-30, 0, 0]$ , střed kruhové podstavy (kolmé k nárysně)  $S[60, 0, 51]$ , poloměr podstavy  $^2r = 35$ . Sestrojte v jednom bodě průnikové čáry její tečnu. (*Opět použijte pro průnikovou čáru metodu soustředných kulových ploch a pro tečnu průnikové čáry normálové roviny v průnikovém bodě čáry.*) Obr.3 je jen orientační, zmenšený. Rýsujte podle souřadnic.

Odevzdávejte poštu a najednou všechny příklady. Budou Vám vrácené opravené poštu přes děkanátne nebo na konzultacích. Poznámka při opravách „*znovu*“ znamená je přerýsovat.

Typeset by *ZOBI*- $\text{\TeX}$   
Mgr. Jan Šafařík