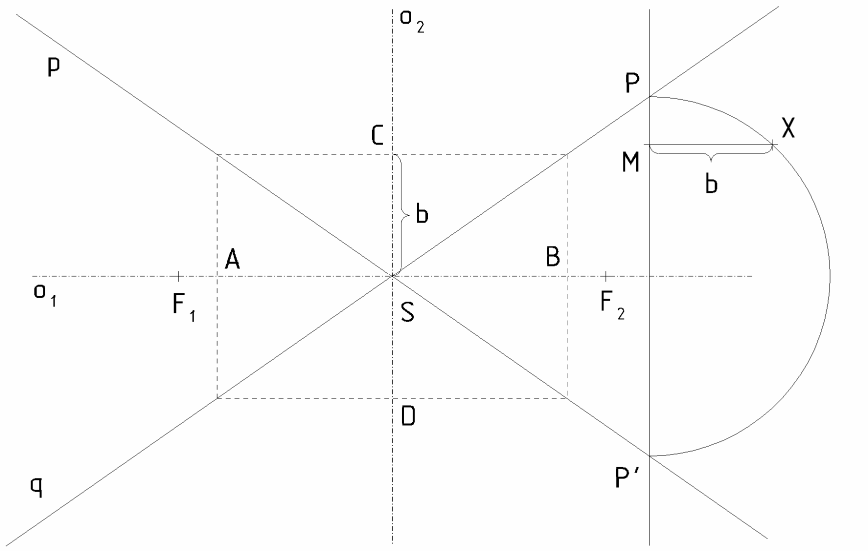
Kuželosečky

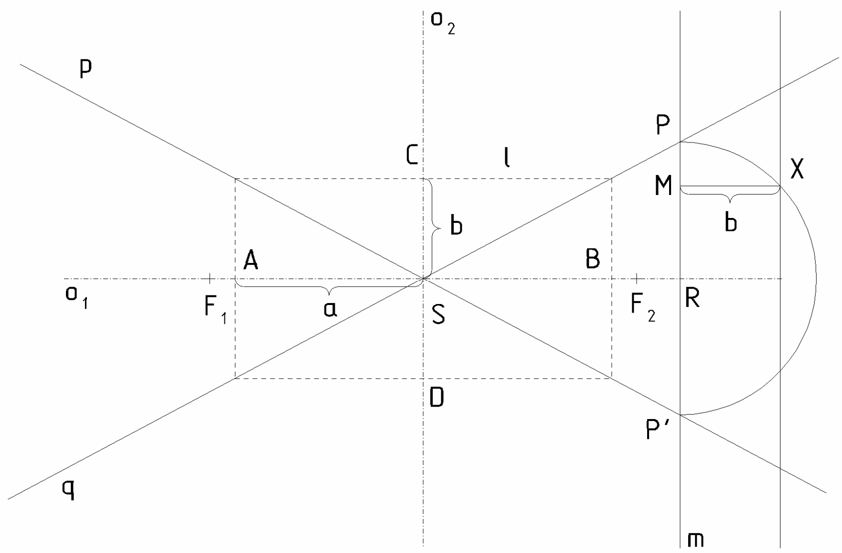
Rozšíření konstrukcí kuželoseček

Hyperbola

Věta: Součin úseků na kolmici k hlavní ose hyperboly, měřených od bodů hyperboly k jejím asymptotám, je konstantní a rovná se čtverci vedlejší poloosy hyperboly.



Příklad 1: Hyperbola je dána asymptotami *p*, *q* a bodem *M*. Určete poloosy.



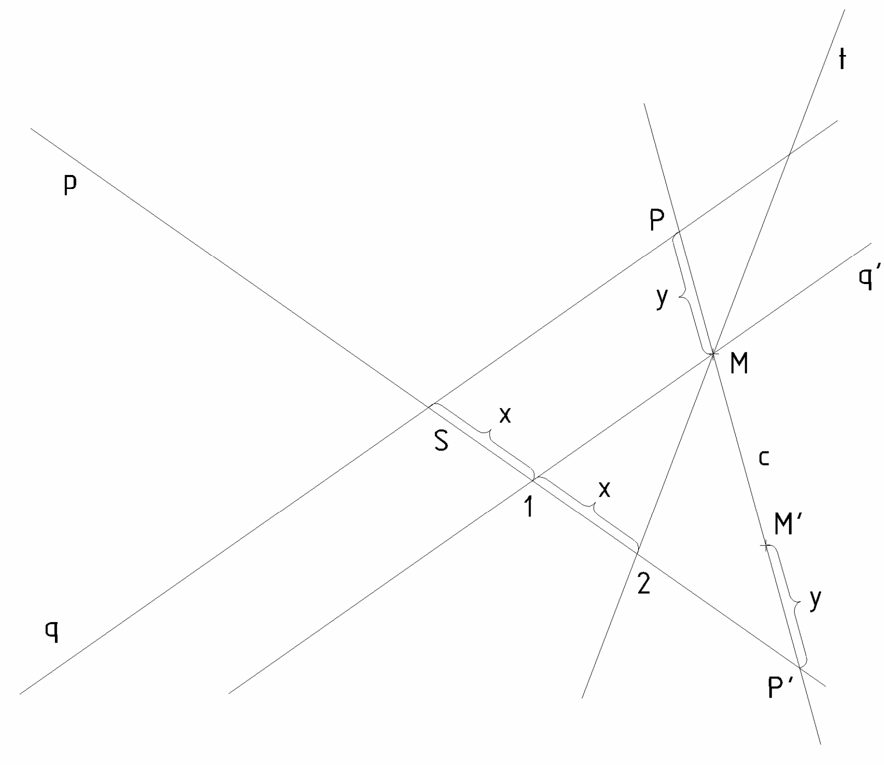
1) osy půlí úhel asymptot
2) $M \in m \perp o_1$
3) $m \cap p, q \rightarrow P, P'$
4) $m \cap o_1 = R$
5) $k \equiv (R; |RP|)$
6) $|MP|.|MP'| = b^2$ (viz Euklidova věta)
7) $C \in o_2$ ve vzd. b od S
8) $l \cap p, q \rightarrow$ „charakteristický obdélník“

Obecně: Součin úseků na sečnách hyperboly rovnoběžných s jednou její osou, vymezených na ní bodem a asymptotami, je konstantní a roven čtverci této poloosy.

Proužková konstrukce hyperboly:
Hyperbola je určena asymptotami *p*, *q* a bodem hyperboly *M*.

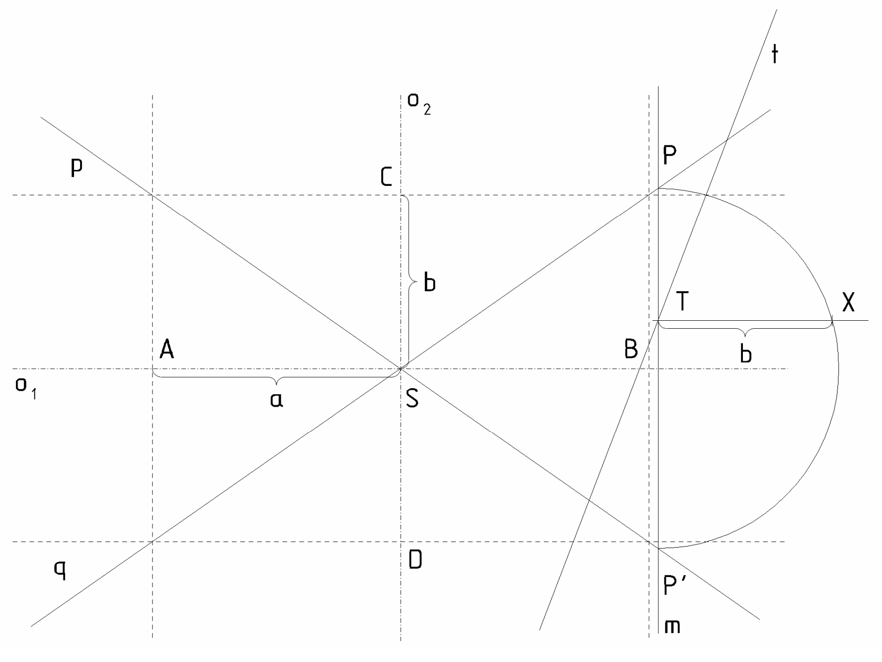
Volí se přímky procházející bodem *M*, sestrojují se jejich průsečíky s přímkami *p*, *q* a k úsečkám *PM* se sestrojují stejně dlouhé úsečky *P'M'*

Příklad 2: Hyperbola je dána asymptotami *p*, *q* a bodem hyperboly *M*. Určete další body hyperboly a najděte její tečnu procházející bodem *M*.



1) $M \in c$ lib.; $c \cap q = P$;
   $c \cap p = P'$
2) $|PM| = |P'M'|$
3) $M \in q' \parallel q$; $q' \cap q = 1$
4) $|S1| = |12|$
5) $2M = t$

Příklad 3: Sestrojte hyperbolu, která je dána asymptotami *p*, *q* a tečnou *t*.

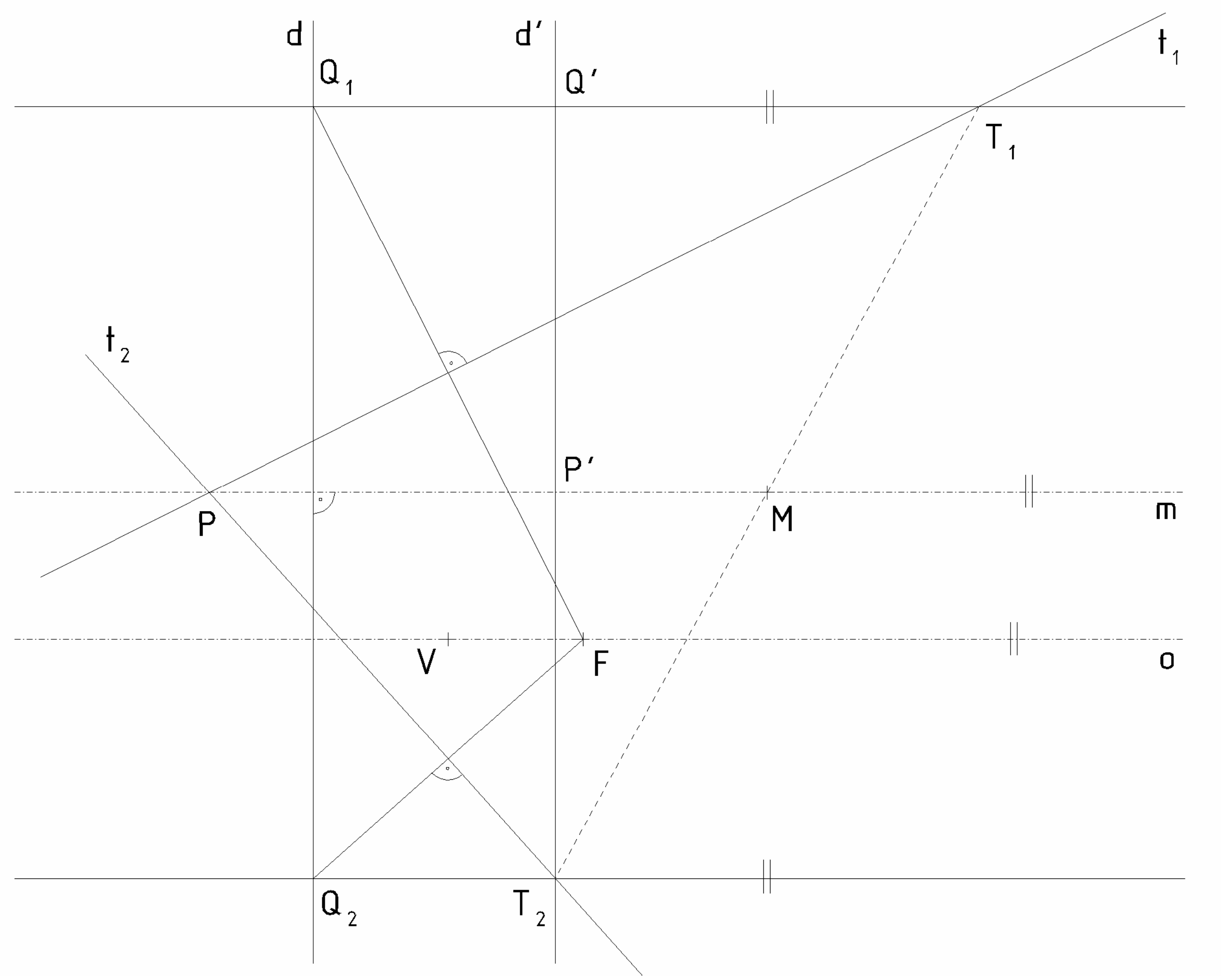


1) rozpůlit úsek na tečně omezený asymptotami → bod dotyku T
2) osy úhlu asymptot → osy hyperboly
3) $T \in m \parallel o_2$
4) $m \cap p, q = P, P'$
5) $|TP| \cdot |TP'| = |TX|^2 = b^2$

Parabola

Definice: Spojnice průsečíku P dvou tečen t_1, t_2 se středem M tětivy T_1T_2 jejich dotykových bodů se nazývá průměrovou přímkou (průměrem) paraboly, sdruženou s tětivou T_1T_2.

Věta: Všechny průměry paraboly jsou rovnoběžné s její osou.

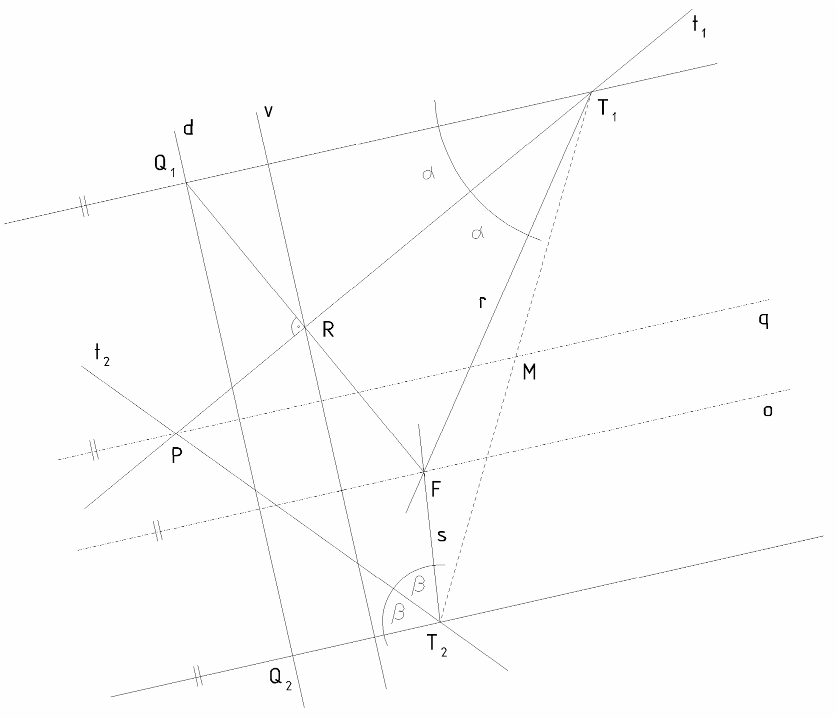


$|PQ_1|=|PQ_2|=r$ kružnice $\Rightarrow$ PQ_1Q_2 rovnoramenný trojúhelník $\Rightarrow$ $P \in m \perp d$; m půlí $Q_1Q_2 \Rightarrow m$ půlí T_1T_2.

d', $T_2 \in d'$, $d' \parallel d \Rightarrow$ pomocné body Q', $P' \Rightarrow P'$ půlí $T_2Q' \Rightarrow$ podobné trojúhelníky $P'MT_2$ a $Q'T_1T_2 \Rightarrow$ poměr podobnosti 1:2 $\Rightarrow M$ půlí T_1T_2.

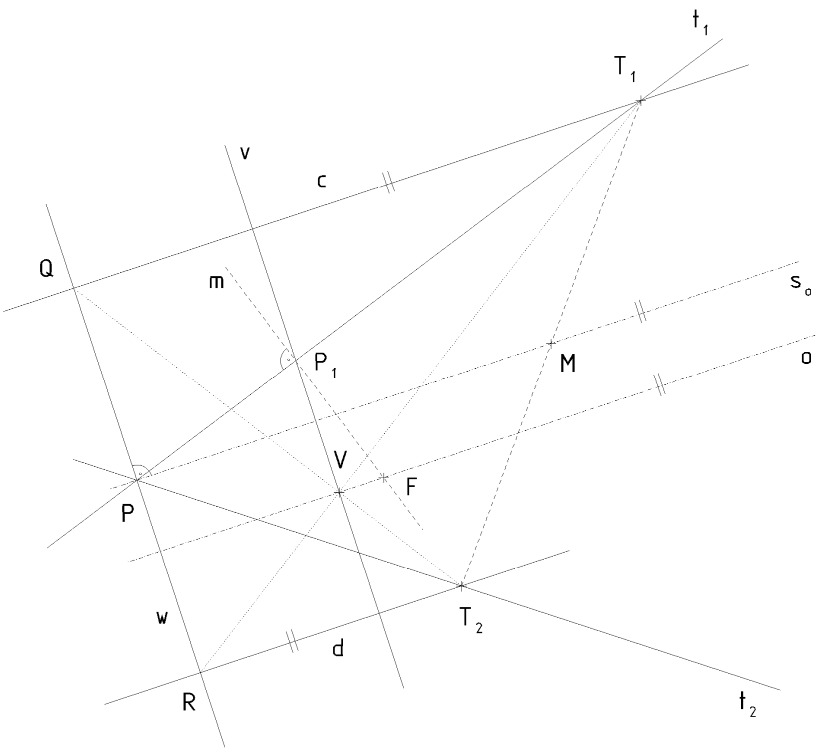
Příklad 4: Sestrojte parabolu danou t_1, t_2 s body dotyku T_1, T_2.

1. způsob řešení:



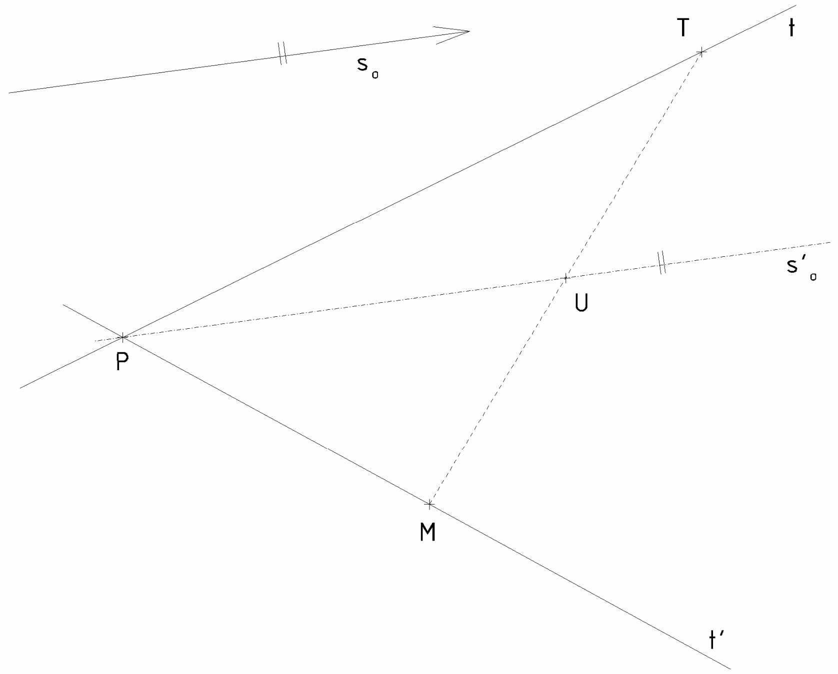
1) $|T_1T_2|/2=M$
2) $PM = q$ – průměr rovnoběžný s o
3) průvodiče bodů T_2, T_2 rovnoběžné s $q \parallel o$
4) r, s – t půlí úhel průvodičů $\Rightarrow$ 2. průvodič souměrný podle t
5) $r \cap s = F$ – ohnisko
6) R – pata kolmice z F na t leží na vrcholové tečně v.
7) Q – bod souměrně sdružený s F podle t
8) d, $d \perp q$, $Q \in d$
9) o, $o \parallel q$, $F \in o$

2. způsob řešení – lichoběžníková konstrukce paraboly:



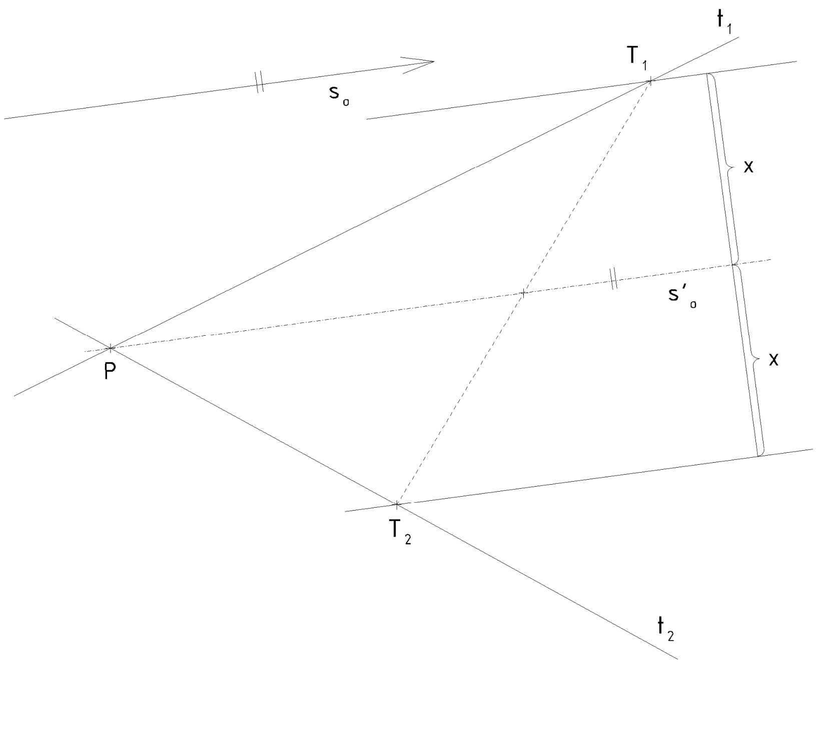
1) $|T_1T_2|/2=M$
2) $PM = q$ – průměr rovnoběžný s o
3) $P \in w \perp s_o$
4) c, $T_1 \in c \parallel s_o$
5) d, $T_2 \in d \parallel s_o$
6) $Q = w \cap c$
7) $R = w \cap d$
8) lichoběžník T_1QRT_2
9) V – úhlopříčky se protínají ve vrcholu paraboly
10) v, $V \in v$, $v \perp s_o$
11) o, $V \in o$, $o \parallel s_o$
12) $P_1 = t_1 \cap v$
13) $F = m \cap o$, $m \perp t_1$, $P_1 \in m$

Příklad 5: Sestrojte parabolu, známe-li směr osy s_o, t+T, M.



1) $|TM|/2=U$
2) s'_o, $s'_o \parallel s_o$, $U \in s'_o$
3) $P = s'_o \cap t$
4) $t' = PM$
5) převedeno na zadání příkladu 4.

Příklad 6: Sestrojte parabolu, známe-li s_o, t_1, T_1, t_2.



1) s'_o, $P \in s'_o$, $s'_o \parallel s_o$
2) T_2, $x = d(T_1,s'_o) = d(T_2,s'_o)$
3) převedeno na zadání příkladu 4.