Test č. 1

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2009-2010

Kuželosečky, afinita a kolineace

(1) (a) Je dána elipsa $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$, $|F_1F_2| < 2a$. Sestrojte několik bodů elipsy, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q.

(b) Je dána elipsa $\mathcal{E}(A, B, e)$ a bod R. Sestrojte tečny z bodu R k elipse $\mathcal{E}$, určete body dotyku.

(c) Je dána elipsa $\mathcal{E}(A, B, e)$ a směr s. Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k elipse $\mathcal{E}$, určete body dotyku.

(2) (a) Je dána hyperbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$, $|F_1F_2| > 2a$. Sestrojte několik bodů hyperboly, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q.

(b) Je dána hyperbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, A)$ a bod R. Sestrojte tečny z bodu R k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku.

(c) Je dána hyperbola $\mathcal{H}(A, B, e)$ a směr s. Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku.

Poznámka: Úloha nemá řešení pro směr s, pokud s', kde $s' \parallel s$, $S \in s$, neleží v úhlu asymptot obsahující vedlejší osu hyperboly $\mathcal{H}$.

(3) (a) Je dána parabola $\mathcal{P}(F, d)$. Sestrojte několik bodů paraboly, hyperoskulační kružnici, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruujte přímky z vět V_P, V_Q.

(b) Je dána parabola $\mathcal{P}(F, d)$ a bod R. Sestrojte tečny z bodu R k parabole $\mathcal{P}$, určete body dotyku.

(c) Je dána parabola $\mathcal{P}(F, d)$ a směr s. Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k parabole $\mathcal{P}$, určete body dotyku.

(4) K pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ najděte afinní $A'B'C'D'E'$.
Afinita je stanovena osou o a dvojicí bodů A, A'.

(5) Ve středové kolineaci (určené středem S, osou o, dvojicí bodů A, A')najděte k pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$ kolineární.

(6) Ve středové kolineaci (S, o, $u \to {}_\infty u'$) sestrojte odpovídající přímky k přímkám a, b, c. (Poloha přímky a vůči ose o je různoběžná, b je s osou rovnoběžná, c je k ose kolmá), kde u je úběžnice, k níž koresponduje nevlastní přímka ${}_\infty u'$ roviny.

(7) Elipsa je určena sdruženými průměry KL, MN. Pomocí afinity sestrojte k nenarýsované elipse tečny z vnějšího bodu R.

(8) Elipsa je určena sdruženými průměry KL, MN. Pomocí afinity sestrojte k nenarýsované elipse tečny tak, aby byly rovnoběžné s daným směrem s.

Elipse e určené sdruženými průměry KL, MN přiřadíme afinně kružnici e' (např. nad průměrem KL, tedy $K \equiv K'$, $L \equiv L'$; $M \to M'$). Osa afinity $o \equiv KL$ a dvojice odpovídajících bodů M, M' určují afinitu.

(9) Elipsa je dána sdruženými průměry. Vyrýsujte elipsu (*Rytzova konstrukce* os elipsy).

I. Elipsa: Elipsa $\mathcal{E}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od dvou pevných (různých) bodů v $\mathbb{E}_2$, zvaných ohniska (značíme F_1, F_2) stálý součet vzdáleností rovný $2a$, který je větší než vzdálenost obou ohnisek.

Věta$_T$: Vkaždém bodě $\mathcal{E}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí *vnější úhel průvodičů* (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t vbodě T a půlí *vnitřní úhel průvodičů.*

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek elipsy $\mathcal{E}$ na její tečny je *vrcholová* kružnice $k(S, a)$.

Věta$_Q$: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy $\mathcal{E}$ (například F_1) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

II. Hyperbola: Hyperbola $\mathcal{H}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od dvou pevných (různých) bodů v $\mathbb{E}_2$, zvaných ohniska (značíme F_1, F_2) stálý rozdíl vzdáleností rovný $2a$, který je menší než vzdálenost obou ohnisek.

Věta$_T$: Vkaždém bodě $\mathcal{H}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí *vnější úhel průvodičů* (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí *vnitřní úhel průvodičů.*

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly $\mathcal{H}$ na její tečny je *vrcholová* kružnice $k(S, a)$.

Věta$_Q$: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly $\mathcal{H}$ (například F_1) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

III. Parabola: Parabola $\mathcal{P}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od pevného bodu F v $\mathbb{E}_2$, zvaného ohnisko, a pevné přímky d, zvané řídící přímka, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.

Věta$_T$: Vkaždém bodě $\mathcal{P}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí vnitřní úhel průvodičů. $\Longrightarrow t_V \parallel d$

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohniska F paraboly $\mathcal{P}$ na její tečny je vrcholová tečna t_V.

Věta$_Q$: Množina bodů Q, souměrně sdružených s ohniskem F podle tečen paraboly $\mathcal{P}$, je řídící přímka d.

Věta: Subtangenta je půlena vrcholem V.

Věta: Délka subnormály je rovna velikosti parametru p.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „doplnit“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Typeset by LaTeX

Test č. 2

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST,
letní semestr 2009-2010

Mongeovo promítání na dvě k sobě kolmé průmětny

(1) (a) Sestrojte stopy roviny α, znáte-li její spádovou přímku první osnovy $s \equiv PN$. $P[-40; 55; 0]$, $N[45; 0; 80]$.
(b) Určete stopy roviny ρ, zadané dvěma různoběžkami $a \equiv AB$, $b \equiv AC$. $A[-40; 0; 0]$, $B[0; 50; 30]$, $C[0; 20; 50]$.
(c) Přímkou $a \equiv AB$ proložte rovinu ρ rovnoběžnou s osou x. $A[-50; 20; 50]$, $B[50; 50; 30]$.
(d) Sestrojte stopy roviny ρ. Rovina je určena bodem A a přímkou $m \equiv MN$. $A[40; 10; 30]$, $M[10; 60; 50]$, $N[-60; 30; 10]$.
(e) Najděte průsečík přímky $p \equiv AB$ s rovinou ρ. $A[-70; 80; 80]$, $B[20; 0; 10]$, $\rho(-70; 60; 50)$.
(f) Určete průsečík Q přímky $m \equiv KR$, $K[-50; 14; 35]$, $R[0; 27; 8]$, s rovinou dvou rovnoběžek $a \parallel b$, $a \equiv PA$, $P[-50; 39; 0]$, $A[0; 14; 62]$, $b \ni B$, $B[-20; 12; 0]$.
(g) Bodem M veďte rovinu α, rovnoběžnou s rovinou ρ. $M[50; 30; 50]$, $\rho(-40; 70; 50)$.
(h) Je dána rovina ρ, přímka $m \equiv MN$ s rovinou ρ různoběžná a bod R, který neleží ani v rovině ρ, ani na přímce m. Sestrojte přímku p tak, aby procházela bodem R, protínala přímku m a byla s rovinou ρ rovnoběžná. $\rho(-44; 16; 28)$, $R[10; 14; 27]$, $M[-40; 19; 34]$, $N[14; 0; 7]$.

(2) (a) Určete vzdálenost d bodu M od roviny α. $M[-30; 40; 50]$, $\alpha(-60; 50; 40)$.
(b) Určete vzdálenost d bodu C od přímky $p \equiv AB$. $A[-40; 20; 30]$, $B[40; -20; 0]$, $C[0; -50; 40]$.

(3) Sestrojte (i s vyznačením viditelnosti) zásek dvou trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle MNP$. $A[-30; 40; 0]$, $B[0; 0; 50]$, $C[40; 60; 40]$, $M[-30; 55; 30]$, $N[-20; 10; 75]$, $P[30; 30; 0]$.

(4) Sestrojte řez roviny $\rho(80; 80; 60)$ kosým kruhovým válcem. Kosý kruhový válec má podstavu v půdorysně o středu podstavy $S[-30; 40; 0]$, poloměr kružnice $r = 35$, střed horní podstavy ${}^1S[30; 90; 70]$.

Pokyny: Užijte osové afinity. Najděte $S' = S\,{}^1S \cap \rho$ *a poté dvojici vzájemně kolmých průměrů v kruhové podstavě. Vyznačte některou afinní dvojici sdružených průměrů. Vyhledejte obrysové body* U, V *přechodu viditelnosti řezu vzhledem ke 2. průmětu a obrysové body* K, R *přechodu viditelnosti řezu vzhledem k 1. průmětu.*

(5) Sestrojte krychli, je–li dán její vrchol $A[10; 30; 15]$ a přímka $p \equiv KL$ ($K[40; 45; 10]$, $L[10; 55; 35]$), na níž leží její hrana, která je s bodem A v téže stěně. Zobrazte to řešení, pro nějž A je nejnižším vrcholem krychle vzhledem k půdorysně π.

(6) Zobrazte průměty rotačního kužele, jehož podstava leží v rovině $\rho(-80; 70; 60)$, její střed je $S[0; 35; ?]$ a dotýká se půdorysny. Výška kužele $v = 60$.

Poznámka: bod, ležící v rovině nesmí být zadáván najednou oběma průměty, chybějící průmět se naopak musí odvodit, aby opravdu takový bod ležel v dané rovině (pomocí hlavních přímek).

(7) Sestrojte průsečíky přímky $b \equiv RQ$ s kosým kruhovým válcem a určete jejich skutečnou vzdálenost. Kosý kruhový válec má podstavu v půdorysně o středu podstavy $O[-10; 40; 0]$, střed horní podstavy $L[50; 40; 70]$, poloměr kružnice podstavy $r = 35$; $R[50; 10; 0]$, $Q[-10; 90; 80]$.

Pokyny: Přímkou b proložíte rovinu φ rovnoběžnou s površkami válce. Po volbě libovolného bodu $H \in b$ zavedete $H \in o' \parallel o$ (bodem H rovnoběžku o' s přímkou $o \equiv OL$). Vyhledáte půdorysnou stopu této roviny $\varphi(b, o')$. Rovina φ protne válec ve dvou rovnoběžných površkách e, f. Jejich půdorysné stopníky jsou průsečíky kruhové základny s půdorysnou stopou roviny φ. Průsečíky těchto površek e, f s přímkou b jsou hledané průsečíky X, Y přímky b s válcem. Vyznačte viditelnost přímky b a průsečíků X a Y.

(8) Určete průsečíky přímky $b \equiv PQ$ s kulovou plochou o středu S a poloměru r.
$S[-15; 40; 40]$, $r = 37$, $P[-15; 90; 100]$, $Q[15; 10; 0]$.

Pokyny: přímkou b_1 proložte rovinu λ, kolmou k půdorysně (nebo k nárysně). Rovina λ řeže kouli v kružnici m. Vyznačte průměr kružnice m_1 (je to úsečka). Najděte střed M_1 na m_1. Sklopte přímku b_1 do (b) a kružnici m_1 do (m) - nejdříve však (M). Vyhledejte průsečíky (X) a (Y) kružnice (m) a přímky (b). Promítacími přímkami odvoďte X_1 a Y_1, později X_2 a Y_2.
Určete viditelnost průsečíků X a Y vzhledem k oběma průmětnám. Vzhledem k 1. průmětu viditelnost rozhodne rovník kulové plochy a poloha bodů X a Y vzhledem k rovníku (posoudíme v druhém průmětu nebo ve sklopeném obraze). Poloha hlavní kružnice na kulové ploše, ležící v rovině rovnoběžné s nárysnou rozhodne o viditelnosti průsečíků X a Y vzhledem ke 2. průmětu. Je-li průsečík X nebo Y k pozorovateli blíže než je střed kulové plochy, je viditelný.

(9) Sestrojte řez kulové plochy, zadané středem S a poloměrem r, rovinou ρ.
$S[0; 45; 50]$, $r = 40$, $\rho(10; 10; -5)$.

Pokyny: Zavedeme třetí průmětnu μ buď kolmou k π (nebo k ν) středem kulové plochy či poněkud odsunutou. Tedy např. kolmou k π: potom poloha třetí průmětny (promítá se do přímky μ_1) je kolmá k půdorysné stopě p_1^ρ. Sestrojíme třetí průmět ρ_3 roviny řezu (bude jím přímka) a třetí průmět kulové plochy (tady začneme od středu S_3). Třetí průmět středu M_3 kružnice řezu je patou kolmice k_3 , vedenou kolmo na rovinu řezu ρ_3. Protože kružnice řezu se promítá (v 3. průmětu) do úsečky, ihned zjistíme průměr této kružnice. Odvodíme do 1. průmětu M_1. Dále použijeme znalostí o průmětu kružnice v nakloněné rovině ρ (je-li dána středem M a velikostí poloměru). Viditelnost vůči 1. průmětu pomůže rozhodnout hlavní přímka ${}^{I}h^\rho$ první osnovy roviny řezu ρ, vedená středem S. Obdobně viditelnost vůči nárysně hlavním přímka ${}^{II}h^\rho$ druhé osnovy.

(10) Kosý kruhový válec protněte *normální* rovinou (tj. rovinou kolmou k površkám válce), jdoucí bodem R. Kosý kruhový válec má podstavu v půdorysně o středu podstavy $S[20; 40; 0]$, střed horní podstavy ${}^{1}S[-20; 40; 90]$, poloměr kružnice $r = 30$, $R[-50; 0; 0]$. Určete skutečnou velikost řezu.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „doplnit“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Typeset by LaTeX

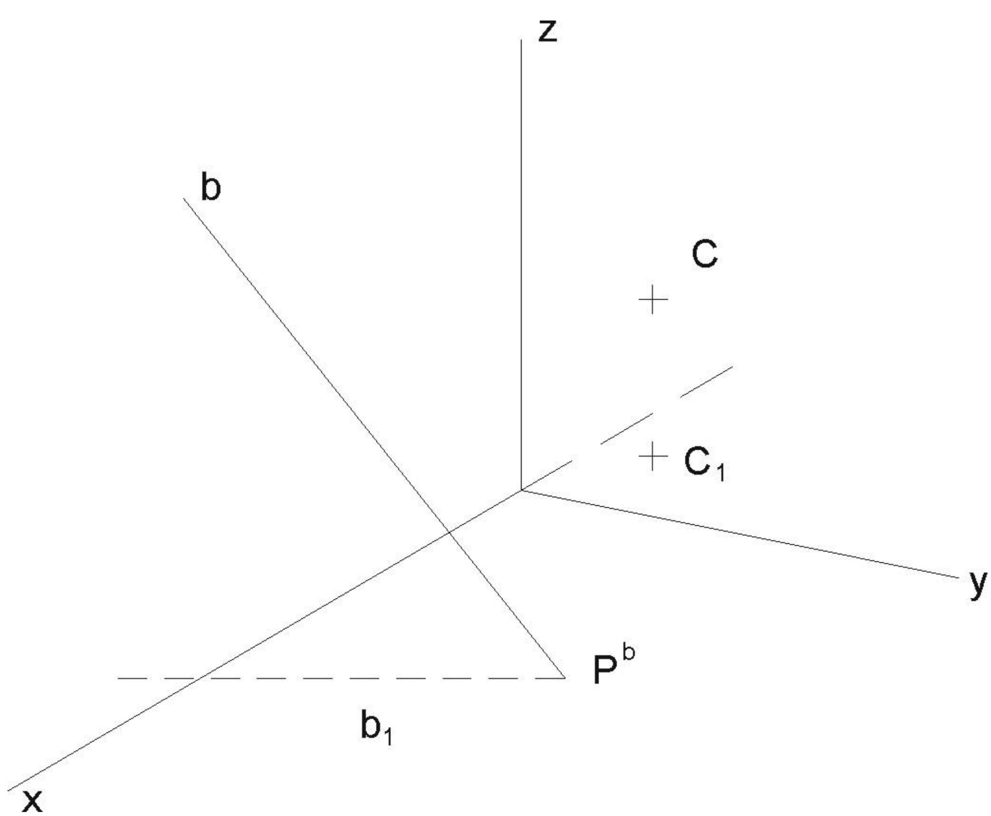
Test č. 3

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2009-2010

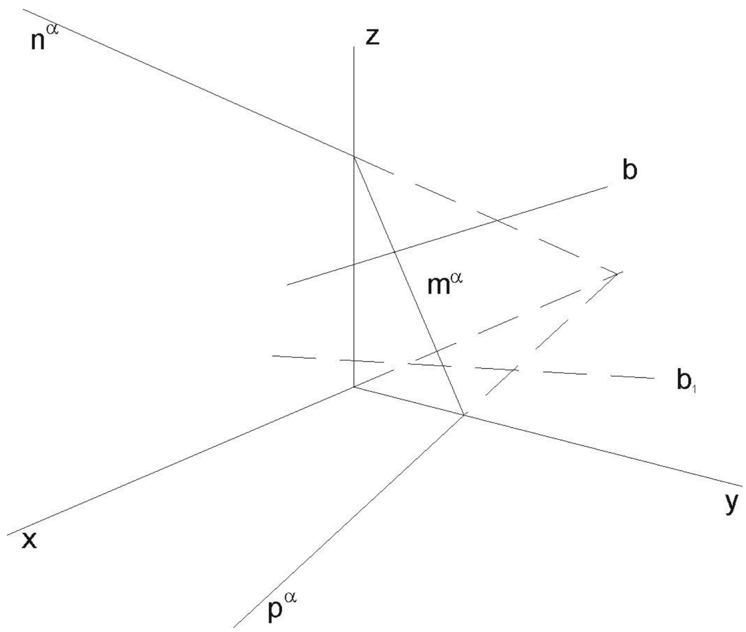
Kolmá axonometrie

Rýsujte tužkou (křivky křivítkem) na volné listy formátu A4 (kancelářský papír). Úkoly č. 1 až 8 můžete vypracovat přímo do zadaných obrázků. U řezů rovinami vyznačte také body přechodu viditelnosti na křivkách řezu. Axonometrický trojúhelník má osu x nalevo.

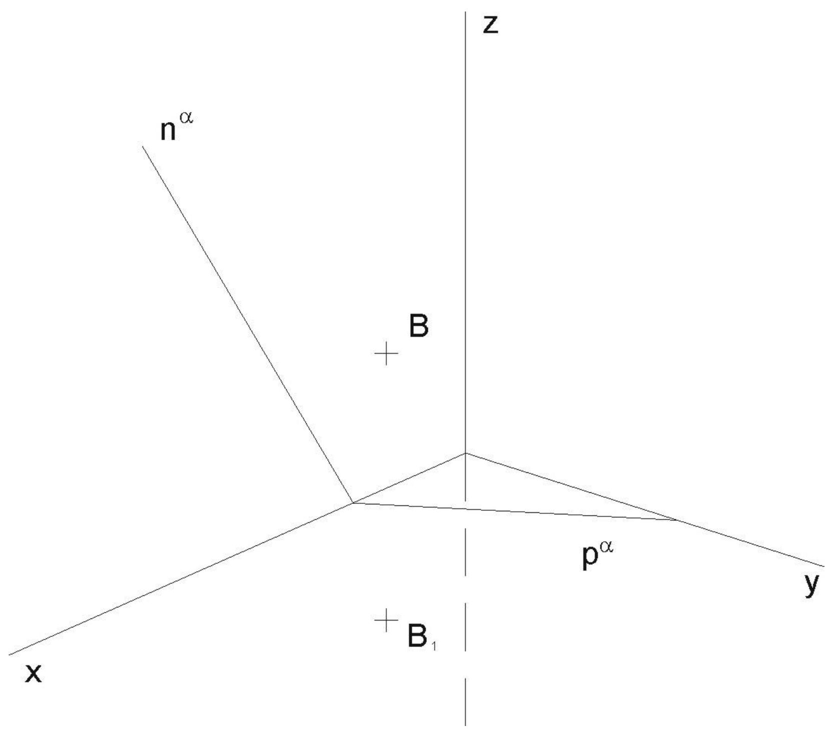
(1) Najděte stopy roviny $\alpha(C, b)$ (určené přímkou b a bodem C).



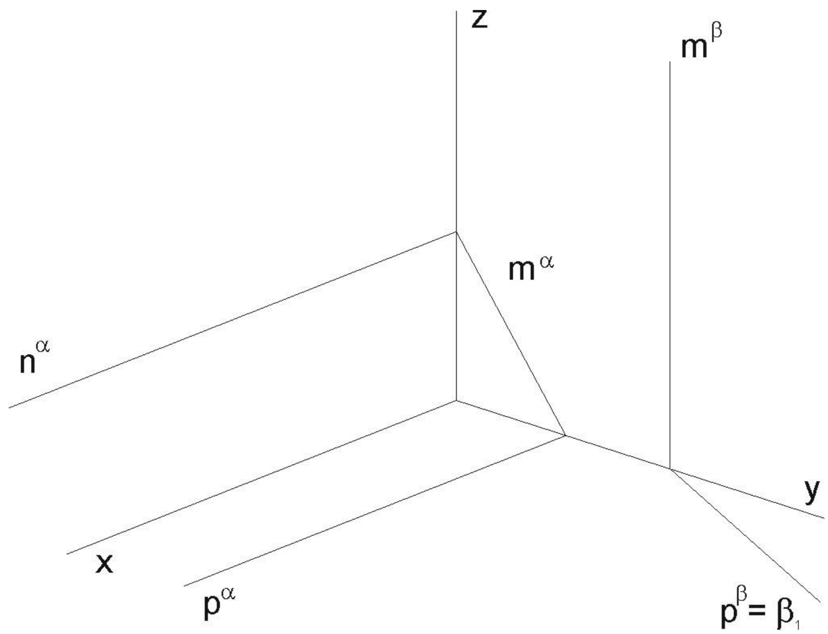
(2) Najděte průsečík $X = b \cap \alpha$ (přímky b s rovinou α).



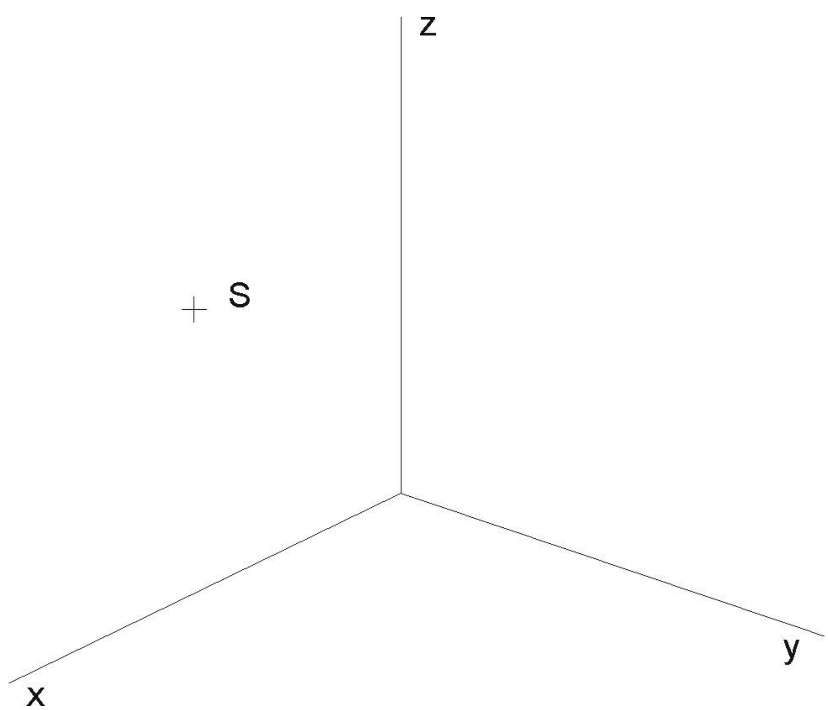
(3) (a) Najděte chybějící stopu m^α.
(b) Bodem B veďte rovinu β tak, aby byla rovnoběžná s danou rovinou α.



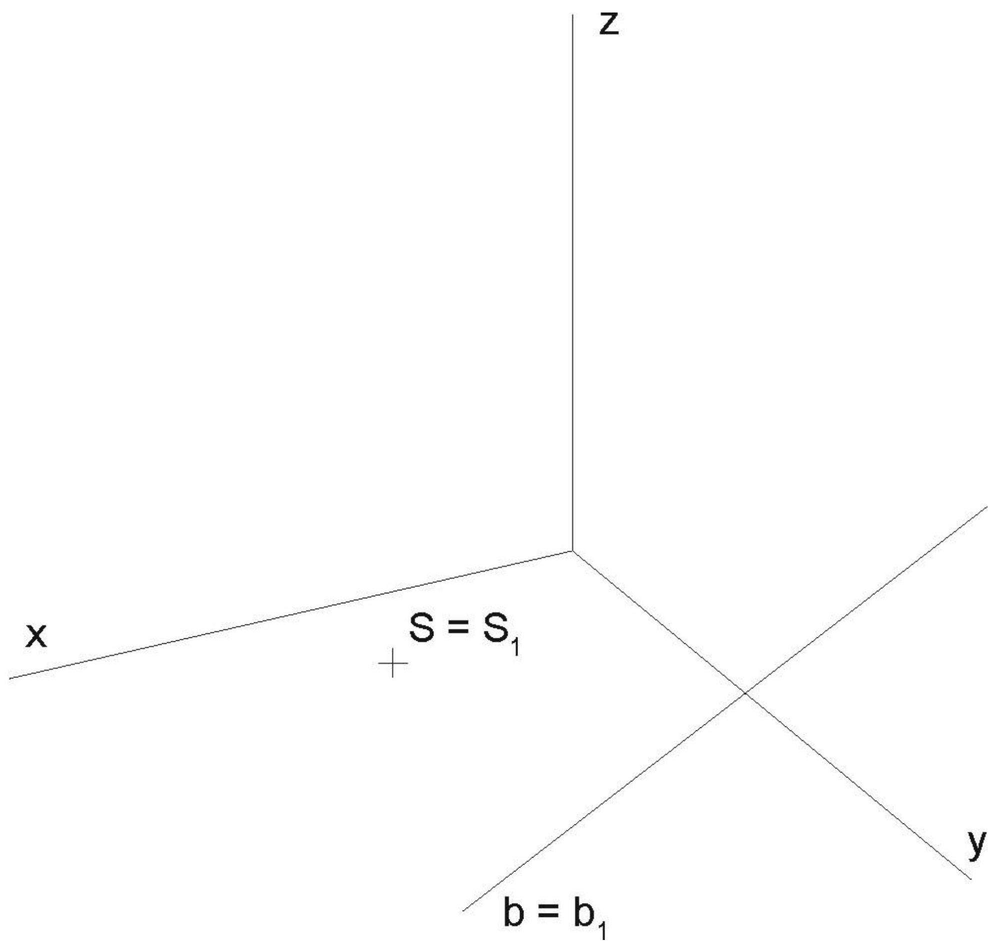
(4) Najděte průsečnici $g = \alpha \cap \beta$ (a také g_1) rovin α a β.



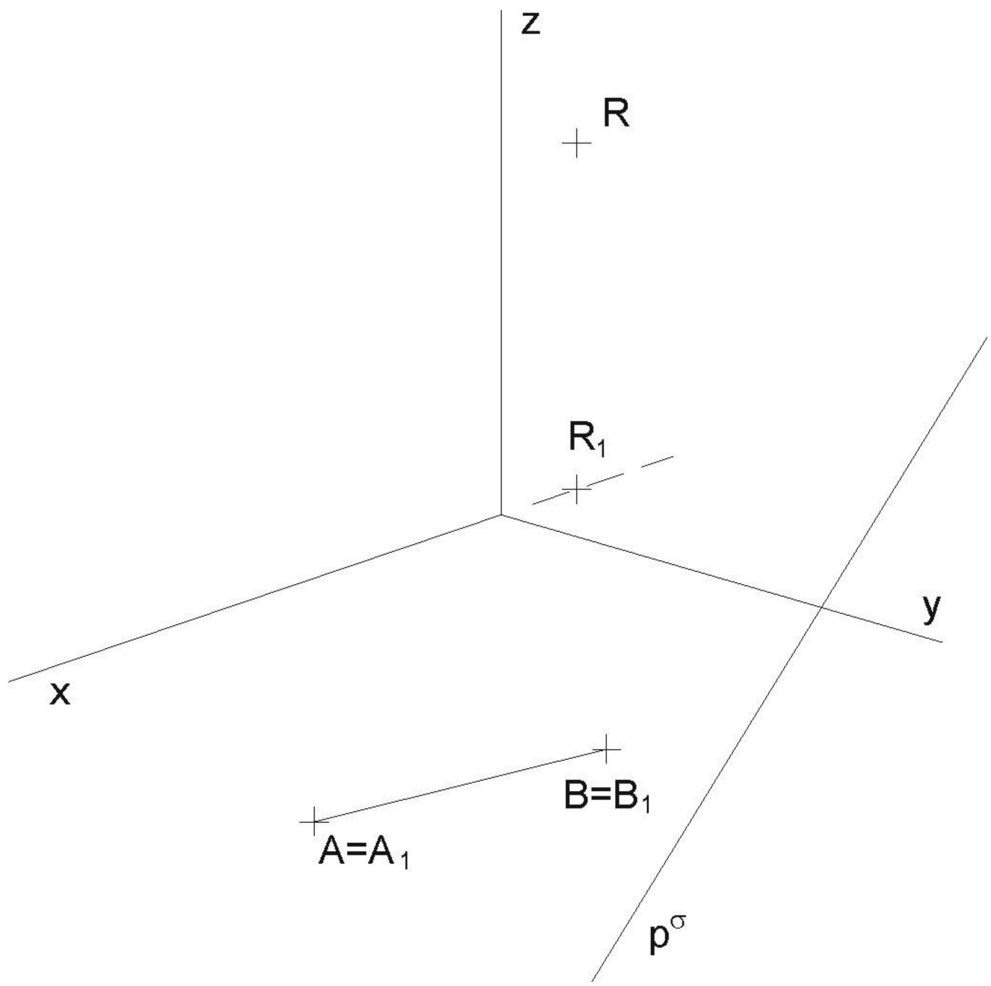
(5) Kružnice leží v souřadnicové rovině $\nu(x, z)$ a je určena středem S a poloměrem r = 25. Kružnici dorýsujte pomocí křivítka.



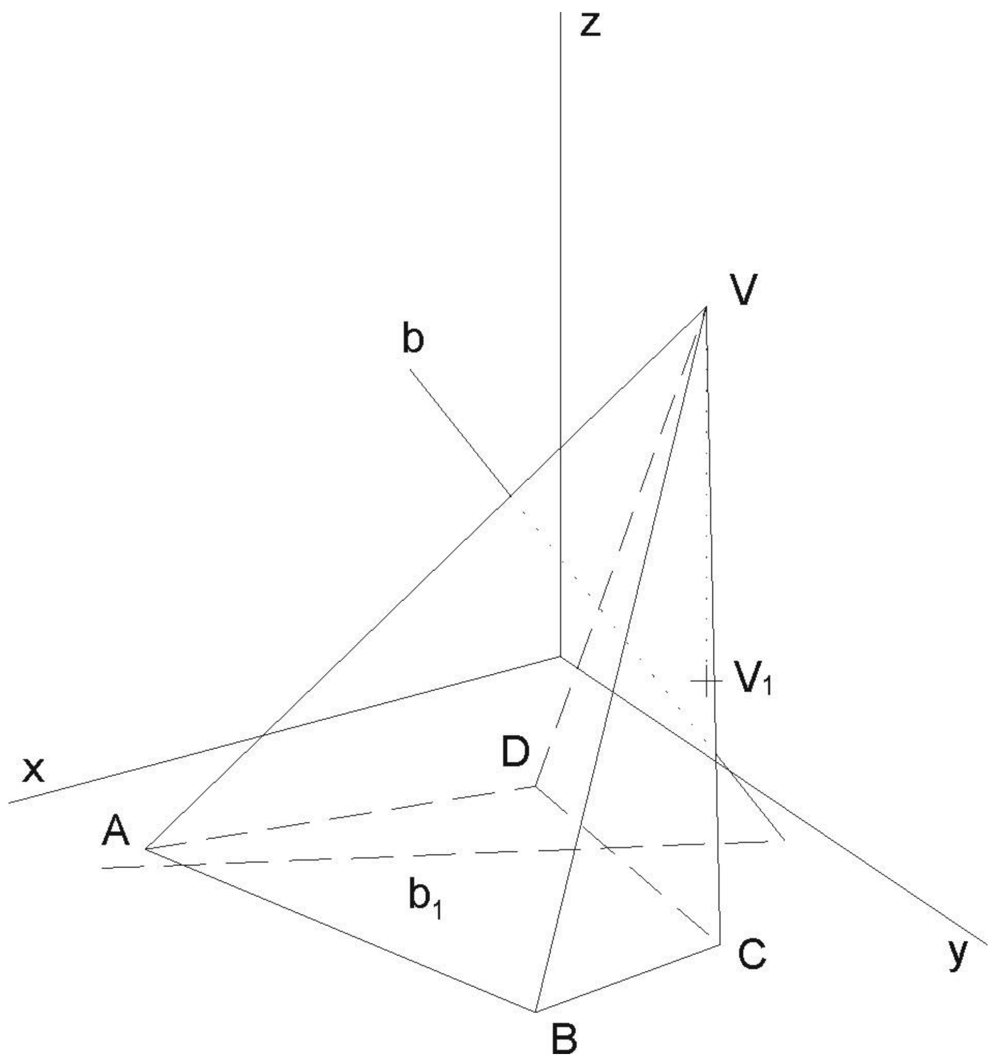
(6) Sestrojte průmět kružnice, ležící v půdorysně, je-li určena středem $S = S_1$ a tečnou $b = b_1$.



(7) S ohledem na viditelnost zobrazte přímý čtyřboký hranol se čtvercovou podstavou v půdorysně, určenou vrcholy A, B. Určete řez rovinou $\sigma(p^\sigma, R)$. Podstavu hranolu volte tak, aby neprotínala půdorysnou stopu roviny řezu p^σ.



(8) Najděte průsečíky X a Y přímky b s kosým čtyřbokým nepravidelným jehlanem.



(9) V kolmé axonometrii – dimetrii $\triangle(100, 100, 115)$ sestrojte průsečíky přímky g $\equiv PR$ s kosým kruhovým válcem o středu kruhové podstavy ${}^1S[48; 45; 0]$. Podstava má poloměr $r = 40$ a leží v půdorysně, druhá podstava má střed ${}^2S[0; 54; 65]$, $P[48; -10; 0]$, $R[5; 120; 78]$. Dále sestrojte řez tohoto válce rovinou $\alpha(-90; 80; 35)$. Užijte osové afinity, vyznačte střed S elipsy řezu a některé sdružené průměry této křivky řezu.

(10) V kolmé axonometrii – izometrii $\triangle(100, 100, 100)$ sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu s podstavou v rovině $\mu(y, z)$ o středu $S[0; 60; 60]$, vrcholu podstavy $A[0; 60; 0]$ a výšce jehlanu $v = 174$, rovinou $\alpha(65; -146; 103)$.

Nejdříve některý vrchol řezu odvoďte jako průsečík boční hrany s rovinou řezu užitím krycí roviny a krycí přímky. Další vrcholy šestiúhelníka řezu už odvozujte užitím kolineace mezi rovinou podstavy a rovinou řezu. Prodlužte strany pravidelného šestiúhelníku k ose kolineace (její stopa roviny řezu v rovině $\mu(y, z)$ podstavy). Využijte důsledně vět o kolineaci a jejich vlastností.

(11) V kolmé axonometrii $\triangle(90, 100, 80)$ sestrojte řezy koule o středu $S[0; 40; 50]$ a o poloměru $r = 70$ rovinou půdorysny π a rovinou nárysny $\nu(x, z)$. Určete body přechodu viditelnosti na křivkách řezu. Dbejte, aby se křivky řezu vzájemně spolu protínaly na ose x!

Uvědomte si, že poloměr kružnice řezu je závislý na vzdálenosti roviny řezu od středu koule. Proto si mimo obrázek sestrojte kružnici o poloměru, jaký má daná koule a ze známé vzdálenosti roviny řezu od středu koule odvoďte příslušný poloměr.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „doplnit“ znamená dorýsovat daný příklad.

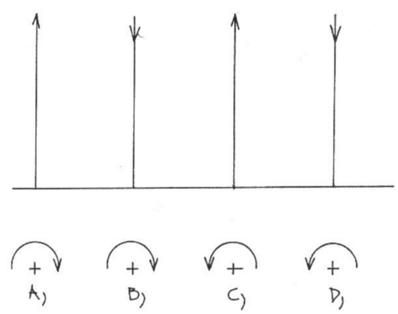
Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Petr Koplík
Typeset by LaTeX

Test č. 4

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2009-2010

Šroubovice a šroubové plochy

(1) V obr. 1 písemně popište varianty A až D, který z pohybů je *levotočivý* a který *pravotočivý*. Současný posun (příslušný k pootočení) ve směru osy o je vyznačen šipkou.



Obr. 1

(2) (a) V Mongeově promítání je dána osa $o \perp \pi$, $o_1(0;35)$. Rozvinutím šroubovice tvořené bodem $A[-15;12;25]$ odvoďte z dané výšky závitu $v = 40$ odpovídající parametr šroubového pohybu (tj. redukovanou výšku závitu v_o). Na tom, zda je pravotočivá či levotočivá, nezáleží.

(b) V Mongeově promítání je dána osa $o \perp \pi$, $o_1(0,30)$. Z dané redukované výšky závitu $v_o = 12$ odvoďte výšku závitu v pro bod $B(18,8,27)$.

Poznámka: všechny konstrukce na šroubovici se prakticky provádějí pomocí jejího rozvinutí v přímku!

(3) V Mongeově promítání je dána osa $o \perp \pi$, $o_1(0;38)$. Bod $C[17;15;37]$ přešroubujte levotočivě do nové polohy C' dolů o úhel $\alpha = 120°$ a odvoďte také polohu C'_2, jestliže výška jednoho závitu šroubovice je $v = 50$.

(4) V Mongeově promítání je dána osa $o \perp \pi$, $o_1(0;35)$. Vyšroubujte bod $D[-22;16;17]$ pravotočivě nahoru o výšku $30mm$ do polohy D', jestliže je dána redukovaná výška $v_o = 16$ závitu šroubovice.

(5) V Mongeově promítání je dána osa $o \perp \pi$, $o_1(0;35)$. Sestrojte konstruktivně tečnu t levotočivé šroubovice v bodě $E[19;14;29]$, je–li dána výška závitu $v = 50$. Konstruktivně, užitím rozvinutí šroubovice do přímky (nestačí tedy jen vyrýsováním

celé šroubovice), odvoďte průsečík šroubovice s půdorysnou (tzv. stopník P^s šroubovice).

(6) V Mongeově promítání je dána osa o, $o_1(0;37)$, dále tečna $t \equiv PQ$ šroubovice, $P[-31;25;0]$, $Q[30;9;50]$. Sestrojte šroubovici, pro kterou je přímka t tečnou. Posuďte písemně, zda je pravotočivá. Odvoďte dotykový bod T této tečny s hledanou šroubovicí. Dále bod T přešroubujte o úhel $\alpha = 150°$ nahoru, odvoďte velikost současného posunu $\triangle z$.

(7) V Mongeově promítání je dána pravotočivá šroubovice osou $o \perp \pi$, $o_1(0;36)$, redukovanou výškou závitu $v_o = 13$ a bodem $T[14;59;37]$. Sestrojte šroubovici v okolí bodu T, včetně tečny v bodě T.

Nepovinně: Sestrojte v bodě T „Frenetův trojhran“: tečnu t, hlavní normálu n, binormálu b (druhou normálu) a vyznačte také stopy oskulační roviny $\omega(t,n)$.

(8) V Mongeově promítání je dána pravotočivá šroubovice osou $o \perp \pi$, $o_1(0;39)$, redukovanou výškou závitu $v_o = 11$ a stopami oskulační roviny $\omega(90;105;29)$. Najděte dotykový bod T a sestrojte tečnu t šroubovice, ležící v oskulační rovině ω.

Nepovinně: Najděte dotykový bod T, odvoďte „Frenetův trojhran“ a naneste od bodu T na tečnu t (směrem nahoru), na hlavní normálu n (směrem z válce ven) a na binormálu (směrem nahoru) úsečky, jejichž skutečná délka je 20mm.

(9) V Mongeově promítání je dán rotační válec o ose $o \perp \pi$, $o_1(0;35)$, poloměru $r = 19$ se dvěma body na povrchu válce $A[-10;y_A > y_o;18]$, $B[15;y_B < y_o;60]$. Spojte tyto dva body po povrchu válce „*nejkratší čarou*“, tj. šroubovicí. Sestrojte dále v bodě B konstruktivně (nikoli odhadem) tečnu t^B. Vyhledejte konstruktivně (interpolačně, odhadem malých dílků) bod Q přechodu (změny) viditelnosti šroubovice na tomto válci (na jeho obrysové přímce).

Obrázek můžete přepočítat a zvětšit o 100% na celou plochu A4. Zvolte v půdoryse ten kruhový oblouk, který je kratší. Tím už bude určeno i zda je šroubovice např. levotočivá, vysvětlete v textu. Poté kruhový oblouk rozdělte na 8 dílků a stejně tak na 8 dílků i výškový rozdíl $\triangle z$ mezi body A a B. Korespondující osminy vyhledejte, vytvoří body hledané šroubovice. Pomocí rozvinutí této šroubovice odvoďte i redukovanou výšku závitu. Nakonec sestrojte tečnu t_B v bodě B.

(10) V kolmé axonometrii, $\triangle(86,95,107)$ vyrýsujte 1.5 závitu pravotočivých šroubovic o poloměru $r = 30$ se společným počátečním bodem $A \in \pi$, osou $o = z$ a redukovanými výškami v_o, v_o', v_o''. Tyto redukované výšky volte tak, aby jeden vrchol V řídicího kužele měl axonometrický průmět uvnitř, druhý na a třetí vně elipsy (kterou je axonometrický půdorys hledaných šroubovic). Doporučujeme skutečné

velikosti: pro $v_o = 9$, pro v'_o by mělo vyjít asi 15 a pro $v''_o = 22$. Bod $A^o = A^o_1$ volte na oblouku kruhové základny mezi kladnými poloosami x a y tak, aby jeho axonometrický průmět splynul s vedlejším vrcholem elipsy (která je průmětem kruhové základny nosného válce). V pátém dílku na šroubovicích (počítaje od bodu $A = 0, 1, \dots$) sestrojte ke každé šroubovici její tečnu – pomocí vlastností řídícího kužele šroubovice.

Pro dělení kruhové základny na 12 dílků užijte afinního vztahu mezi půdorysným průmětem šroubovice a jeho otočeným obrazem.

(11) V Mongeově projekci je dána *pravotočivá pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha* osou šroubového pohybu $o \perp \pi$, $o_1(0, 30)$, parametrem šroubového pohybu $v_o = 18$, šroubuje se úsečka $\overline{AB}$, $A[-50, 80, 25]$, $B[-15, 45, 25]$. Na ploše je dán bod T' jeho půdorysem $T'_1[25, 42, ?]$. Sestrojte přesně nárys T'_2 a odvoďte stopy p^τ, n^τ tečné roviny τ v bodě T'.

[výsledek přibližně: $\tau(-250, 5; 132; 77)$]

(12) V kolmé axonometrii $\Delta(100, 110, 120)$ sestrojte jeden a čtvrt závitu *pravotočivé pravoúhlé uzavřené šroubové přímkové plochy*, která je určena šroubováním úsečky $\overline{AB}$. Šroubový pohyb je určen osou $o \equiv z$ a redukovanou výškou závitu $v_o = 15mm$, $A[40, 0, 0]$, $B[0, 0, 0]$. V bodě $T[0, 30, ?]$ sestrojte tečnou rovinu τ, včetně jejich tří stop p^τ, n^τ, m^τ! Sestrojte křivku, která je čarou zdánlivého obrysu pro axonometrický průmět.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „doplnit“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Typeset by LaTeX

Test č. 5

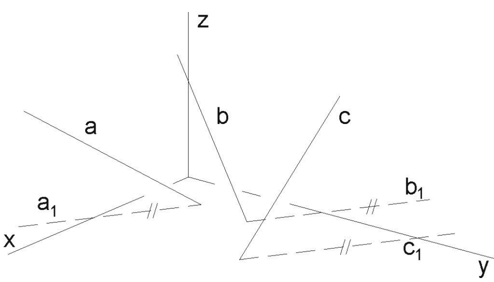
Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2009-2010

Zborcené plochy

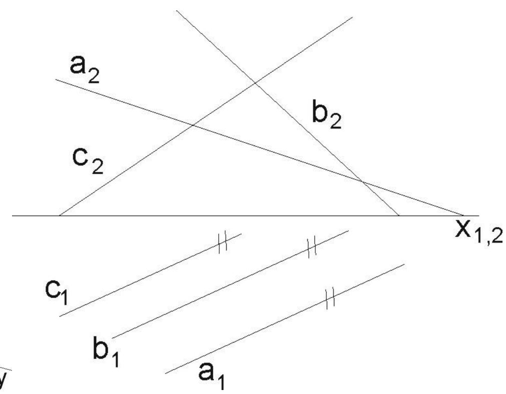
Při vypracování úloh se využijí následující poznatky:

a) u plochy jednodílného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu je každá přímka jednoho systému přímek protínána všemi přímkami druhého systému přímek;

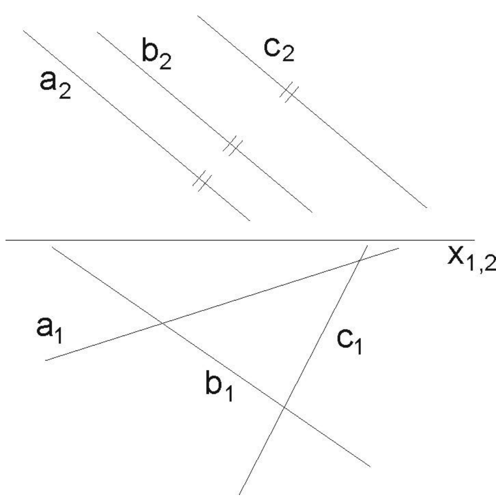
b) v každém bodě těchto ploch se kříží dvě různoběžné tvořící přímky plochy (jsou z opačných systémů přímek) a tyto různoběžky určují tečnou rovinu plochy s dotykovým bodem v jejich průsečíku;



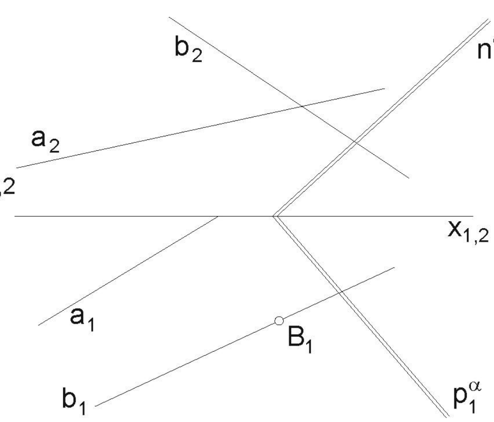
Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c



Obr. 2

(1) Jakou vzájemnou polohu zaujímají tři přímky a, b, c v axonometrickém zobrazení (obr. 1a), 1c)) a v Mongeově projekci (obr. 1b) ?

Poznámka: Jsou-li 3 přímky rovnoběžné s jistou rovinou, (ale mezi sebou zůstávají vzájemně mimoběžné), pak určují hyperbolický paraboloid. Takovou polohu mimoběžek nazýváme „komplanární“.

(2) Zborcená plocha je určena řídicí rovinou α a mimoběžkami a, b, podle obr. 2). Napište název této plochy a dále sestrojte v bodě B tečnou rovinu τ.

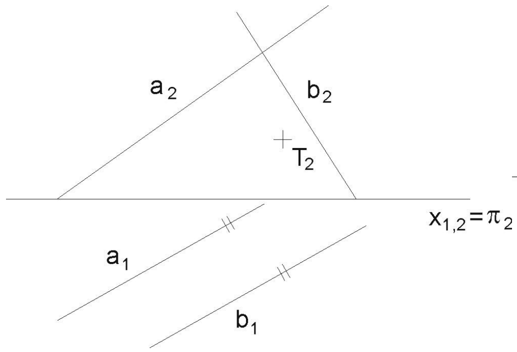
Návod: tečná rovina je tvořena přímkou b a přímkou z druhého (opačného) systému, zpravidla tedy čárkovanou. Dále platí: jsou-li dány dvě mimoběžné přímky plochy a řídicí rovina, pak přímky *druhého* systému (tudíž čárkované a v obr. nezadané), musí být rovnoběžné s danou řídicí rovinou.

Poznámka: zadaná řídicí rovina je dána kvůli možnosti tvořit přímky druhého, čárkovaného systému. V podstatě nahrazuje třetí přímku, která je nevlastní. Všechny přímky druhého regulu musí tuto nevlastní přímku protnout. Z toho plyne, že jsou rovnoběžné s řídící rovinou. Kdyby byla zadána řídicí rovina,patřící k systému přímek a, b, zborcená plocha by nebyla dostatečně určena.
Řídící rovinu, patřící k systému přímek a, b si sami kdykoli můžeme odvodit: zvolíme v prostoru pevný bod a tímto bodem vedeme rovnoběžky se zadanými přímkami a, b. Tyto nové přímky jsou různoběžné a určují rovinu, která je řídící rovinou systému s přímkami a a b.

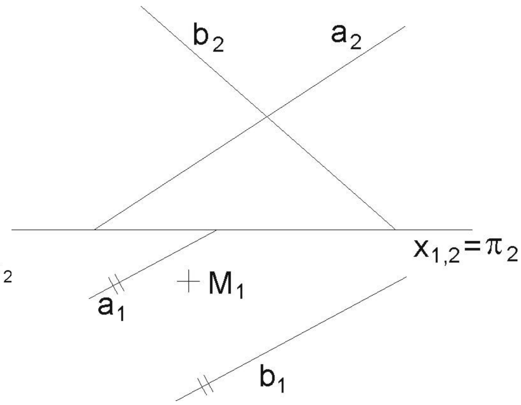
Jde tedy o to, vést bodem B přímku druhého (čárkovaného) systému, rovoběžně s řídicí rovinou α. Bodem B vedeme posunutou rovinu $\alpha' \parallel \alpha$ (zavedením hlavní přímky nové roviny α' některé osnovy bodem B). Po sestrojení stop nové roviny α', najdeme průsečík A druhé přímky a s rovinou α'. AB je přímka g čárkovaného systému, přímka je rovnoběžná s rovinou α. Takže nyní máme dvě různoběžky, protínající se v bodě B, které tvoří hledanou tečnou rovinu $\tau(b, g')$.

(3) Hyperbolický paraboloid je zadán průměty dvou mimoběžek a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), při čemž je $a_1 \parallel b_1$. Dále je dán T_2 bodu T, který leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys T_1 a přímky obou systémů procházejících bodem T. Podle obr. 3.

Návod: vedeme bodem T_2 přímku g' druhého systému, rovnoběžnou s řídicí rovinou π, takže g'_2 je rovnoběžná se základnicí. Odvodíme pomocí jejích průsečíků s přímkami a,b také půdorys g'_1 a na ordinále T_1. Bodem T procházejí po jedné přímce g' a c z každého systému. Přímku c_1 máme ihned: když $a_1 \parallel b_1$ je i $c_1 \parallel a_1 \parallel b_1$ (kvůli komplanaci u HP). Nárys c_2 přímky c odvodíme pomocí přímky m'. Přímka m' - čárkovaná ($\parallel \pi$), např. ležící přímo v π (tzn., že $m'_2 = x_{1,2}$ a m'_1 je spojnice půdorysných stopníků přímek a,b). Odvodíme nárys průsečíku m' a $c - P_2^c$ a propojením s bodem T_2 získáváme nárys přímky c_2.



Obr. 3



Obr. 4

(4) Hyperbolický paraboloid je určen mimoběžkami a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), podle obr. 4. Přitom $a_1 \parallel b_1$. Odvoďte nárys bodu M_2, leží-li M na ploše, a je zadán jen svým půdorysem M_1.

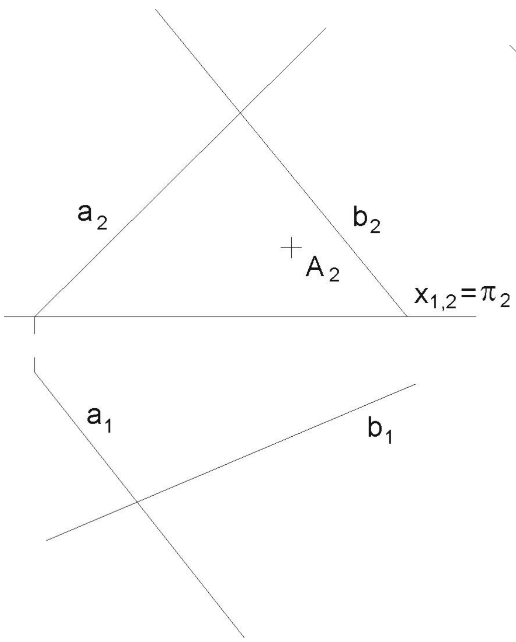
Návod: postupujeme podobně jako v 3. př.: nejdříve připravíme c_1, $M_1 \in c_1 \parallel b_1$. Dále v nárysе narýsujeme aspoň dvě přímky čárkované a odvodíme je do půdorysu. Vyhledáme v půdoryse dva průsečíky přímky c_1 s čárkovanými přímkami. Odvodíme tyto dva průsečíky do nárysu na čárkované přímky. Spojením těchto průsečíků v nárysе získáme i přímku c_2 a na ordinále bod M_2.

(5) Hyperbolický paraboloid je zde, podle obr. 5, zadán obecně: mimoběžkami a, b, které už nemají rovnoběžné první průměty, a řídicí rovinou π. Najděte půdorys bodu A, ležícího na ploše, je-li dán jeho nárys, a sestrojte tečnou rovinu v tomto bodě.

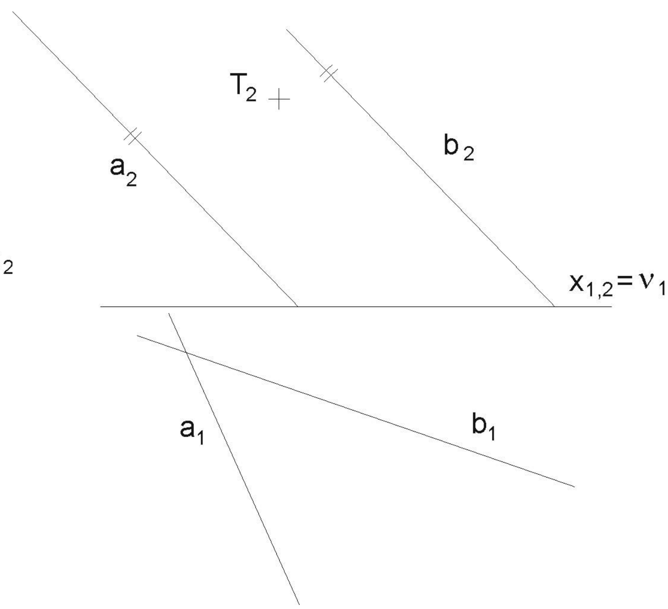
Návod: Vedeme bodem A_2 čárkovanou přímku g_2' rovnoběžnou se základnicí ($\parallel \pi$) a odvodíme její půdorys včetně půdorysu bodu A_1. S přímkou $A \in c$ to bude však složitější: její půdorys nemůžeme dokonce ani odhadnout (komplanace přímek a, b, c na ploše hyperbolického paraboloidu - i když v prostoru určitě existuje - je v prvním průmětu zastřena). Pomůžeme si jistou grafickou „lstí“ (je užívána i v literatuře a bez ní to ani nejde): na ploše tedy existují nyní vodorovné čárkované přímky (díky tomu, že π je jejich řídicí rovina). Jedna z čárkovaných přímek je sice vodorovná, ale navíc také kolmá k nárysně, nazveme ji $r' \perp \nu$. Stále - i zde - platí obecná věta: „*Všechny přímky nečárkovaného systému jsou protínány zase přímkami systému čárkovaného*“.Tato přímka r' proto nutně protíná přímky a, b (protože vzhledem k nim patří do opačného systému). Protože ale $r' \perp \nu$, jeví se v nárysе jen jako bod r_2'. Oba průsečíky přímek a, b s přímkou r', ačkoli jsou od sebe různé, se v nárysе promítají do jediného bodu r_2'. Ten tedy musí být společným průsečíkem nárysů a_2, b_2.

Dále platí, že i přímka c (procházející bodem A) musí protínat přímku r' a její nárys proto musí procházet také bodem r'_2, tedy $c_2 = r'_2.A_2$. Nárys přímky c již máme. Známe-li alespoň dvě čárkované přímky q', p', můžeme půdorys přímky c odvodit s jejich pomocí.

V bodě A se protínají přímky c a g'. Tyto přímky určují tečnou rovinu τ s bodem dotyku A s plochou. Najděte i stopy tečné roviny τ.



Obr. 5



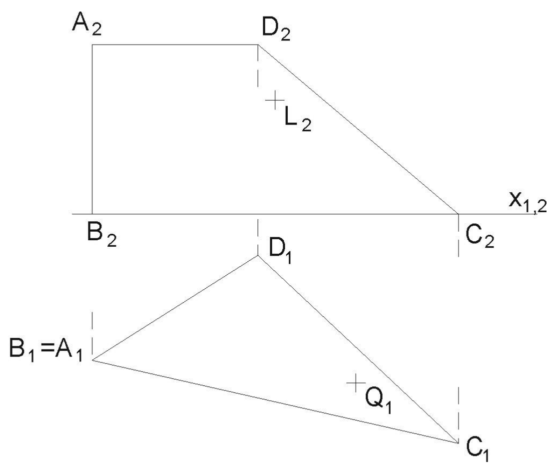
Obr. 6

(6) V obr. 6 je zadání hyperbolického paraboloidu trochu převrácené. Řídicí rovinou je nárysna ν a nárysy přímek a, b jsou spolu rovnoběžné. Dále je dán nárys bodu T. Odvoďte jeho půdorys a stopy tečné roviny pro tento dotykový bod T.

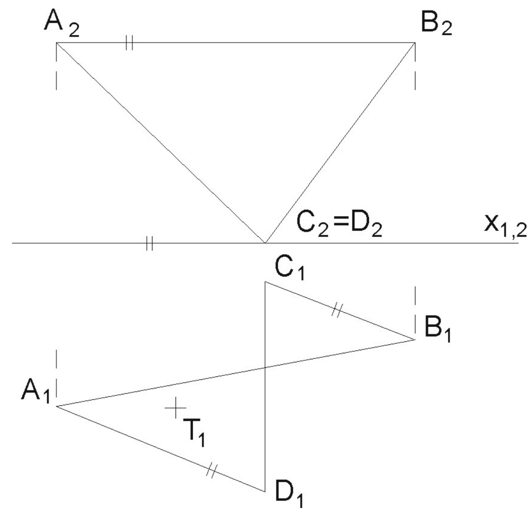
Poznámka: podrobný popis už neuvádíme, student by si měl postup odvodit podle předcházejících úloh.

(7) V obr. 7 je plocha hyperbolického paraboloidu určena zborceným čtyřúhelníkem A, B, C, D. Body L a Q leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys bodu L a chybějící nárys bodu Q.

Návod: vyzkoumejte polohy řídicích rovin a z toho vyplývající zákonitost pro průměty tvořících přímek obou systémů. Potom už snadno zavedete danými průměty bodů jednotlivé průměty tvořících přímek a k těmto průmětům pak přiřadíte i chybějící průměty přímek.



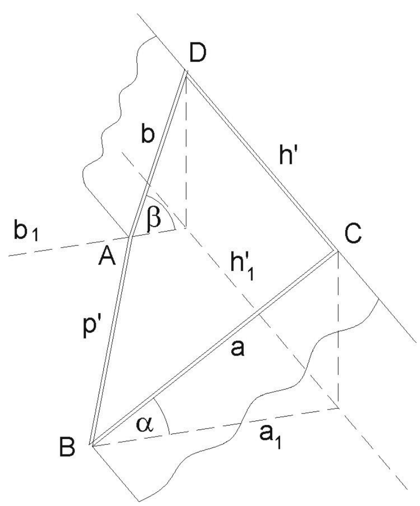
Obr. 7



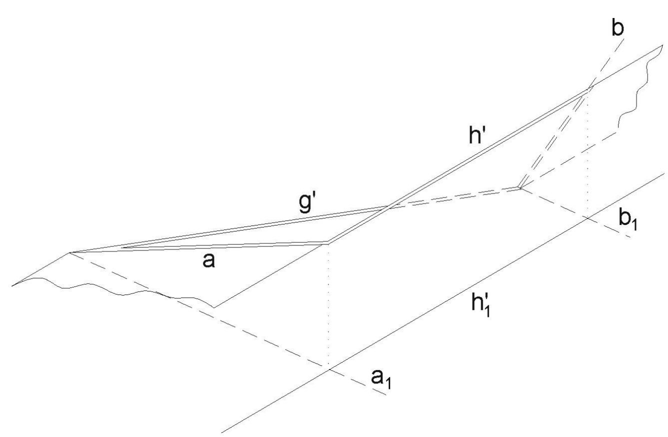
Obr. 8

(8) V obr. 8 si všimněte, že u zborceného čtyřúhelníka jsou strany AB a CD rovnoběžné s první průmětnou. Odvoďte chybějící průmět bodu T.

Zde končí základní úlohy na hyperbolický paraboloid a poznatky, uvedené v úvodu. Další příklady jsou již aplikace, v principu použitelné ve stavebnictví.



Obr. 9



Obr. 10

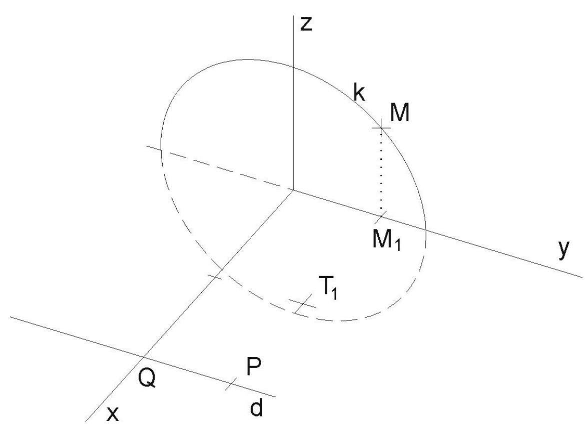
(9) V obr.9 je dána v axonometrii přechodová plocha *hyperbolického paraboloidu*, propojující dva profily různých sklonů a a b. Máte sestrojit 8 tvořících přímek každého systému.

Poznámka: podotýkáme, že další stavební uplatnění, tomuto blízké, můžeme nalézt při zastřešení, jsou-li vodorovný hřeben a okapová hrana ve vzájemně mimoběžné poloze.

(10) Stejný úkol Vás čeká v obr. 10. Jde jen o jiný axonometrický pohled na tuto přechodovou plochu, tvořenou zborceným (prostorovým) čtyřúhelníkem, jehož strany leží na přímkách, popsaných takto: nakloněné a, b, vodorovná g' je v půdorysně a h' je vodorovná, ale horní strana. U plochy takto natočené vzhledem k pozorovateli získáme navíc i křivku axonometrického obrysu (tou bude parabola, jako obalová křivka axonometrických průmětů tvořících přímek).

(11) Podle obr. 11 je zadán v kolmé axonometrii (axon. trojúhelník volte sami) *kruhový konoid*. Řídící kružnice k leží v souřadnicové rovině $y.z$, má střed S v počátku a poloměr $r = 30$, řídící přímka d prochází bodem $Q[50, 0, 0]$ a je rovnoběžná s osou y, řídící rovinou konoidu je nárysna $x.z$. Je dán ještě půdorys $T_1[25, 20, ?]$ bodu T, ležícího na ploše.

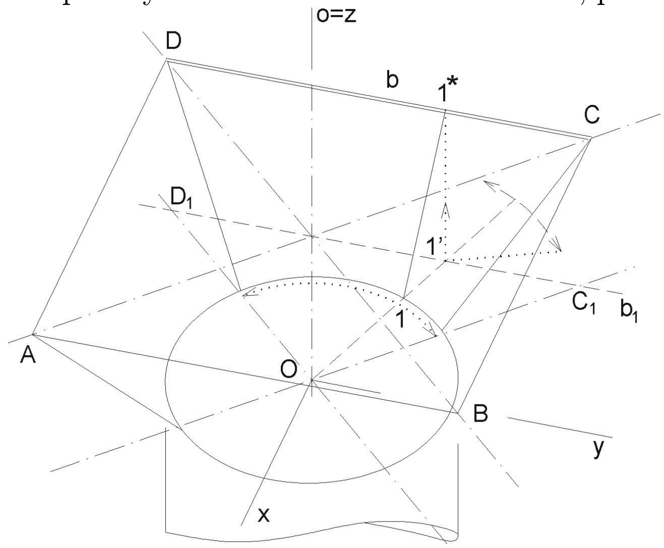
a) Odvoďte bod T (užitím tvořící přímky m plochy).
b) Sestrojte řez e rovinou $\alpha \in T$, $\alpha \parallel y.z$.
c) Dále sestrojte řez vertikální rovinou λ, volenou bodem T, ale různoběžnou se souřadnicovými rovinami.



Obr. 11

Návod:
ad a) Tvořící přímka m konoidu bude rovnoběžná s řídící rovinou $x.z$. Proto její půdorys m_1 bude procházet daným půdorysem T_1, rovnoběžně s osou x. Průsečík m_1 s půdorysem k_1 (na ose y) kružnice k označme M_1. Ordinálou odvodíme na kružnici nahoru bod M. Půdorys m_1 také protíná i řídící přímku d v bodě P (d a P leží v půdorysně). Propojením $m = PM$ získáme tvořící přímku m. Ordinálou

z půdorysu T_1 odvodíme na přímku m bod T.
ad b) Pro křivku e řezu v rovině, rovnoběžné s bokorysnou $y.z$ platí, že 3. průmět křivky e_3 bude afinně sdružený s kružnicí $k = k_3$ a osou afinity bude osa y.
ad c) křivku g řezu sestrojujeme postupně bodově, každý její bod jako průsečík jednotlivé tvořící přímky s rovinou řezu λ. Je to snadné, protože rovina λ je svislá.



Obr. 12

(12) Sestrojte v kolmé axonometrii, obr. 12, plochu násypky, tvořenou 4 díly (z nichž vždy dva a dva jsou symetrické) zborcené plochy *Montpellierského oblouku.* Každý takový díl je samostatně tvořen částí řídicí kružnice v půdorysně o středu v počátku, dále společnou řídicí přímkou $o = z$ a vodorovnou řídící přímkou např. b (na ní leží strana vodorovného obdélníka). Jedná se tedy o přechodovou (ale nerozvinutelnou, zborcenou) plochu, propojující vodorovný obdélník či čtverec (vodorovná dvířka) s kružnicí (tj. ukončující svislé násypné potrubí). Máme tedy 4 Montpellierské oblouky, vzájemně na sebe navazující. Omezení a navázání na sebe u jednotlivých Montpellierských oblouků je ve svislých rovinách, procházejících úhlopříčkami AC, BD vodorovného obdélníka. Vaším úkolem je vyrýsovat tvořící přímky zborcené plochy ve všech 4 dílech. Přitom v každém dílu vyrýsujte nejméně 5 přímek, včetně krajních.

Návod: protože všechny tvořící přímky musí protínat i řídící přímku $o = z$ a ta je (v našem příkladu) kolmá k půdorysně, budou všechny půdorysy tvořících přímek procházet půdorysem přímky o, tedy počátkem. Budou proto prostými protahovanými průměry kružnice. Poznačíme si u nich očíslováním 1, 2, 3, … průsečíky s kružnicí. V průsečících (obdobně očíslovaných $1'$, $2'$, $3'$, …) , kde tyto půdorysy tvořících přímek protínají půdorys b_1 strany b obdélníka, povedeme vertikálně ordinály na stranu b obdélníka. Tyto nové průsečíky očíslujeme 1^*, 2^*, 3^*, … Získáme tak systém čísel např.: $1 + 1' + 1^*$. Postupně propojujeme jednotlivě body 1 a 1^*, atd. a tak obdržíme tvořící přímky plochy. Neviditelné úseky čárkujeme.

(13) V kolmé axonometrii $\triangle(100, 130, 120)$ sestrojte tvořící přímky zborcené plochy, jejíž řídící útvary jsou: kružnice v půdorysně π o středu $S[60; 60; 0]$, $r = 40$, přímka $p \parallel y$, jdoucí bodem $P[60; 60; 80]$, a řídící rovina $\nu(x, z)$. Určete název plochy a najděte přibližně 20 tvořících přímek.

Návod: protože tvořící přímky jsou rovnoběžné s řídící rovinou $x.z$, budou jejich p;dorysy rovnob26n0 s osou x. Tyto půdorysy budeme rýsovat v rozsahu řídící kružnice. Rovnoběžky s osou y klademe přibližně po 1 cm šířky mezi těmito půdorysy. Sestrojíme půdorys $p_1 \parallel y$.

Průsečíky půdorysů tvořících přímek s půdorydem přímky p_1 přeneseme po ordinálách na přímku p. Tyto body spojíme s průsečíky půdorysů příslušných tvořících přímek s řídící kružnicí (ta je přímo dána v půdoryse) a dostaneme tím axonometrické obrazy tvořících přímek.

Dbáme ovšem na to, aby při spojení takových bodů šlo vždy o body stejné y-ové vzdálenosti. Jenom tak splní tvořící přímka podmínku, že je rovnoběžná s řídící rovinou $x.z$.

Body na řídící přímce p s krajními hodnotami (min. a max. y-ová souřadnice) jsou kuspidální body.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „dodělat“ znamená dorýsovat daný příklad.

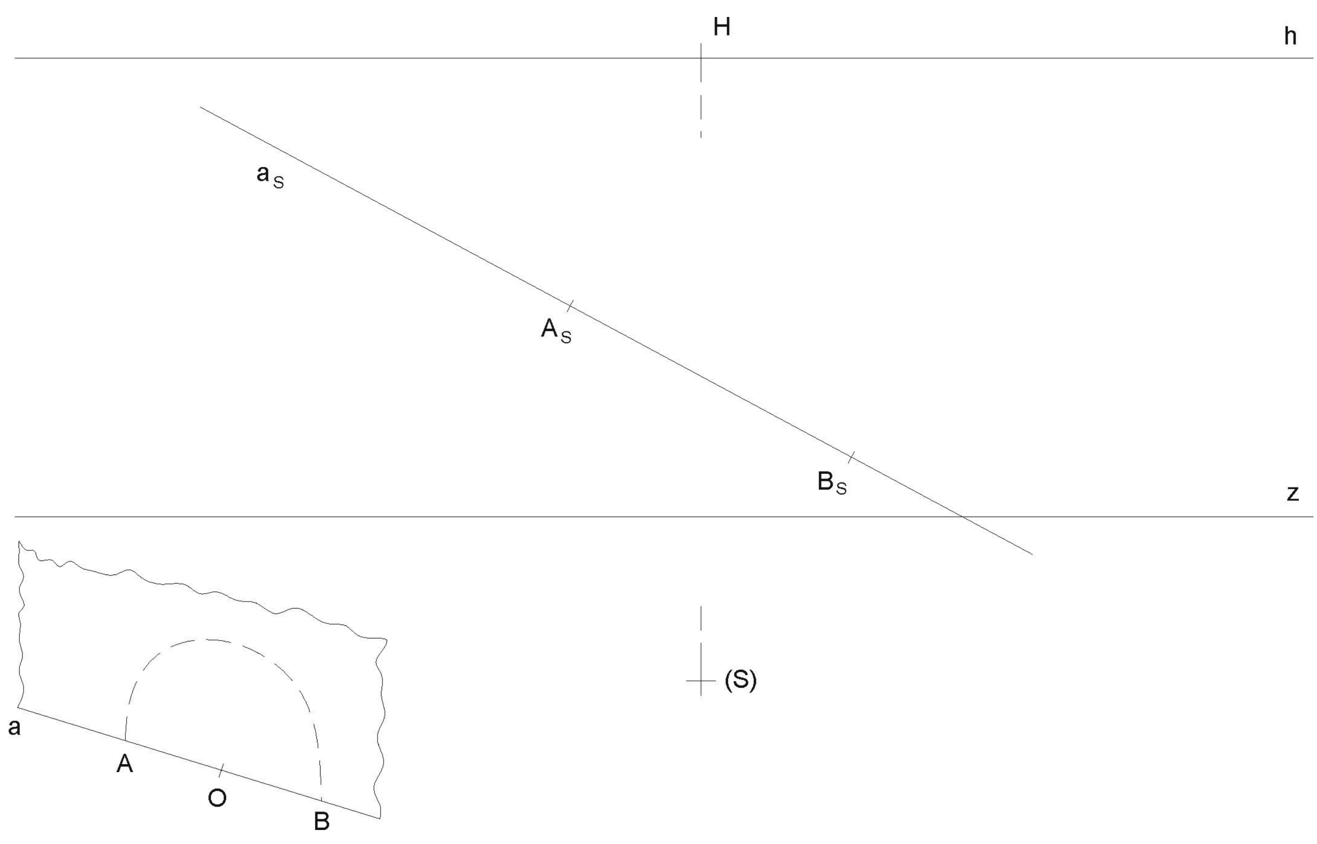
Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Typeset by LaTeX

Test č. 6

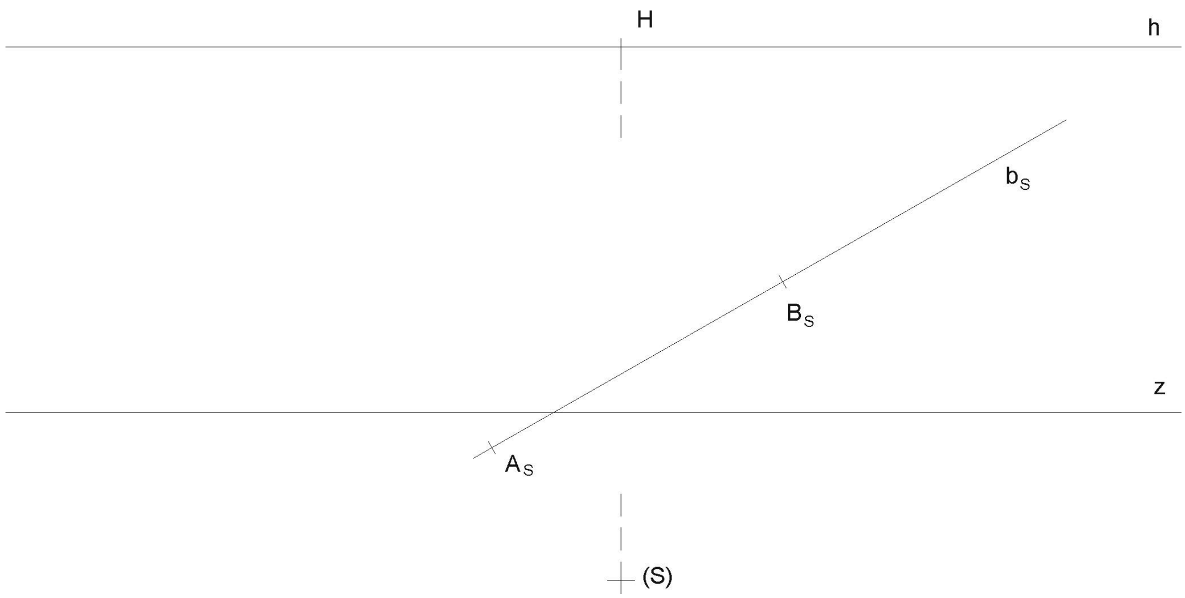
Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2009-2010

Lineární perspektiva

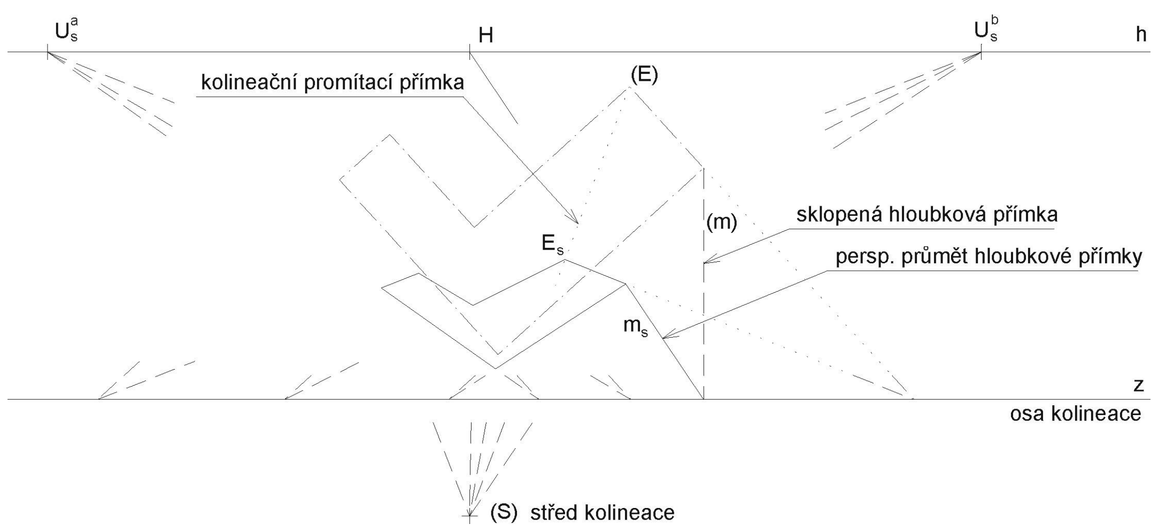
(1) Nad průměrem $A_S B_S$ (A, B leží v základní rovině π) sestrojte metodou „osmi tečen“ (horní) půlkružnici ve vertikální rovině.

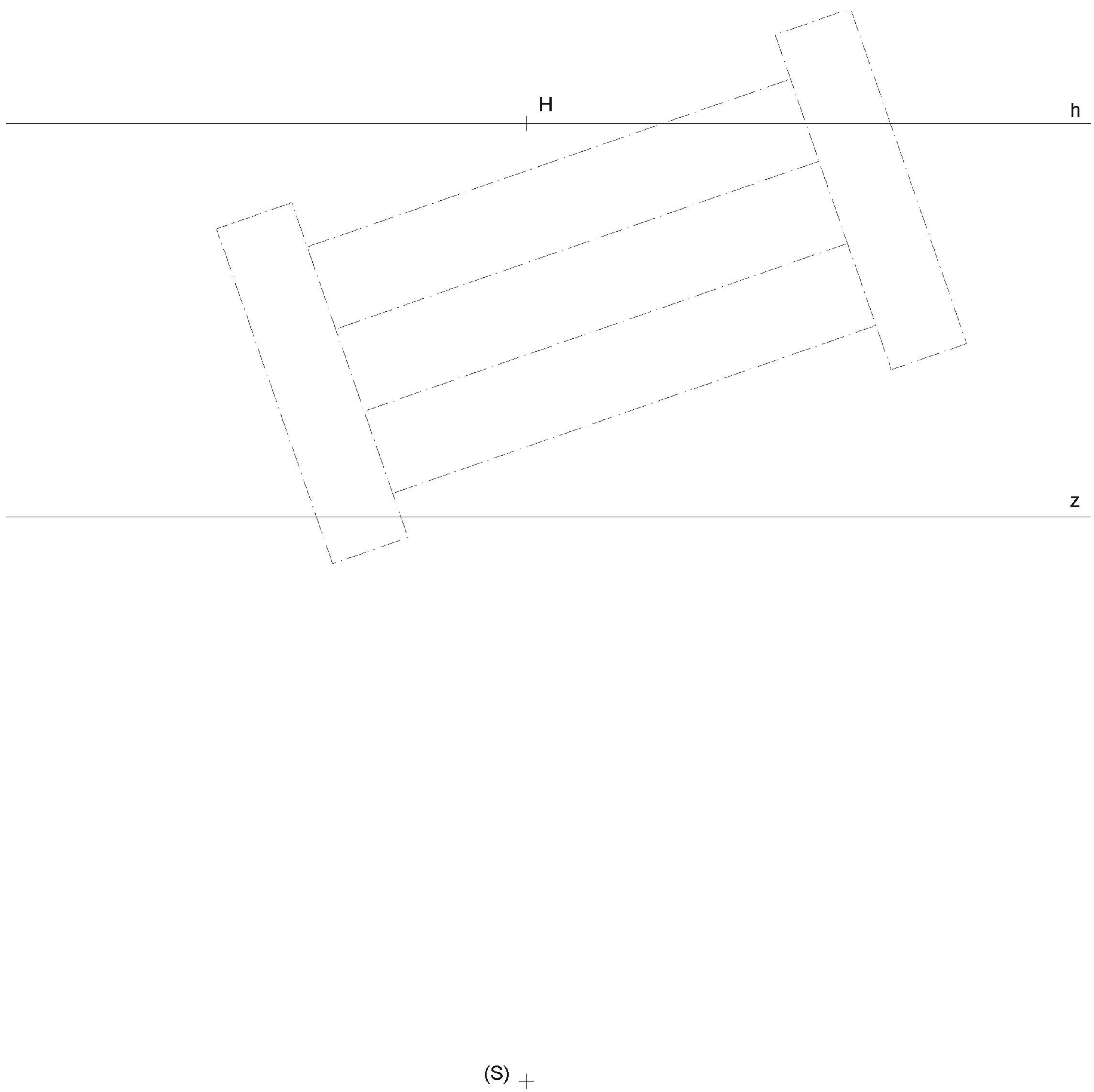


(2) Sestrojte kvádr $ABCDEFGH$ s podstavou v základní rovině π, je-li dána perspektiva jeho hrany $A_S B_S$ na přímce b_S, přímka b leží v základní rovině π, a je-li dána podmínka, že skutečné velikosti tří kolmých hran jsou v poměru délek: $AB : AD : AE = 2 : 3 : 2$.



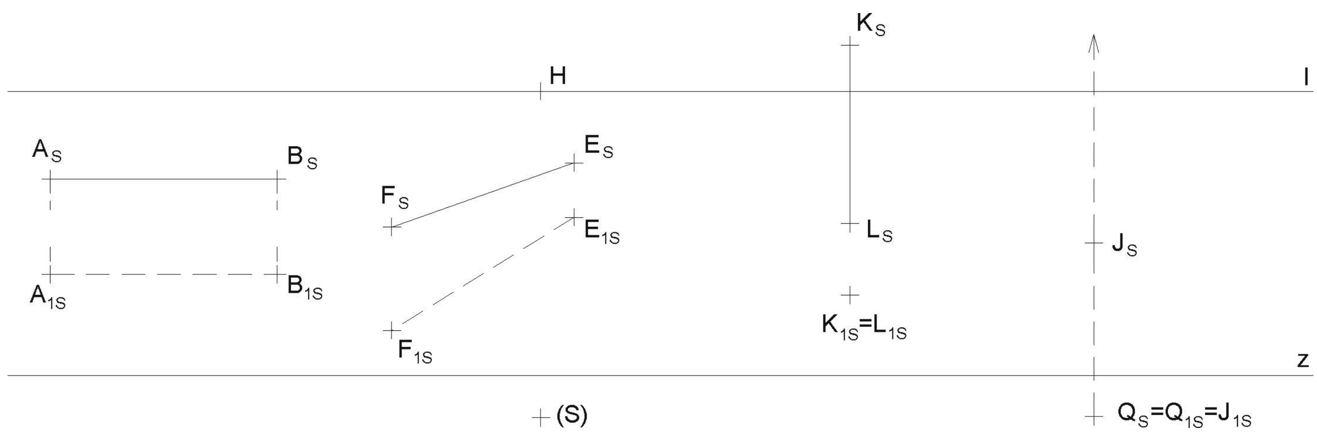
(3) Metodou „sklopeného půdorysu“ sestrojte perspektivu schodiště. Půdorys schodiště je již čerchovaně předrýsován v poloze „sklopeného půdorysu“. Postupujte podle principu, který je na obrázku. Připojte i výšky: boční zídky a jednotlivé stupně schodů. Doplňte nárysem v Mongeově promítání, ve stejném měřítku jako je zadaný sklopený půdorys.



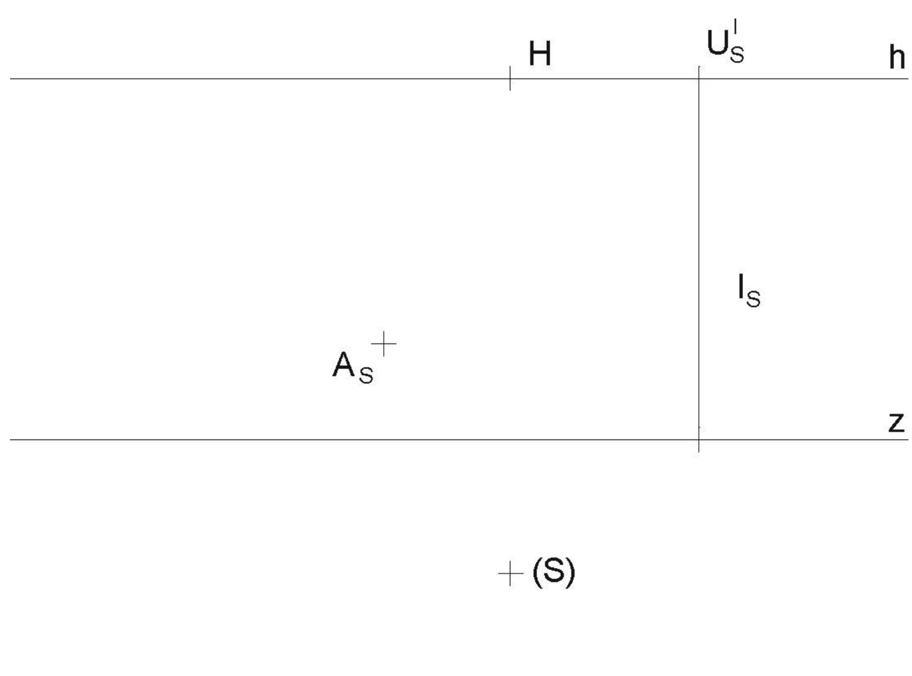

H
h
z
(S)

(4) Zjistěte skutečné velikosti úseček:
- úsečka AB je horizontální a v průčelné poloze (tj. rovnoběžná s persp. průmětnou),
- úsečka EF je horizontální, ale různoběžná s perspektivní průmětnou.

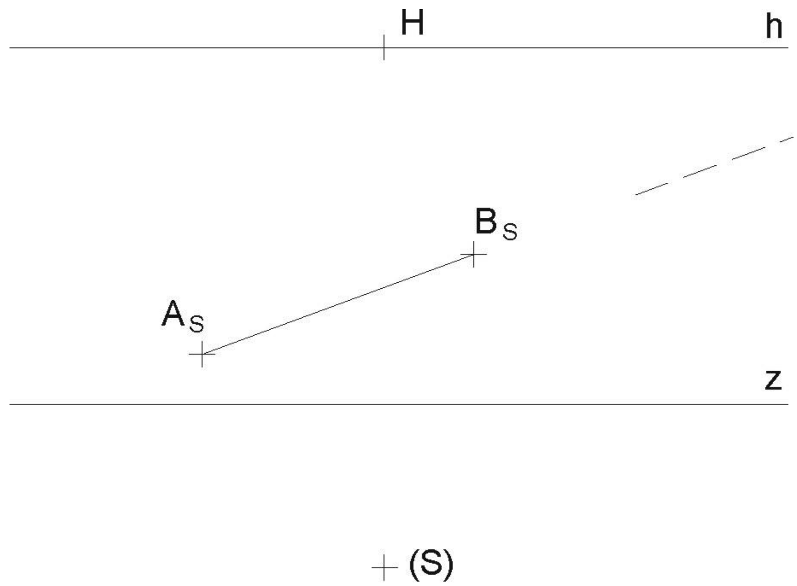
(5) Zjistěte skutečnou velikost úseček:
- úsečka KL je vertikální a vznáší se nad půdorysnou, jejím perspektivním půdorysem je bod $K_{1S} = L_{1S}$,
- hledá se průmět $J_S V_S$ úsečky JV, je-li její skutečná velikost $3cm$. Úsečka je vertikální a je dán její dolní koncový bod J. Přímka, na které leží tato úsečka, má průsečík Q_s s vodorovnou rovinou π, tudíž bod $Q_{1S} = J_{1S}$.



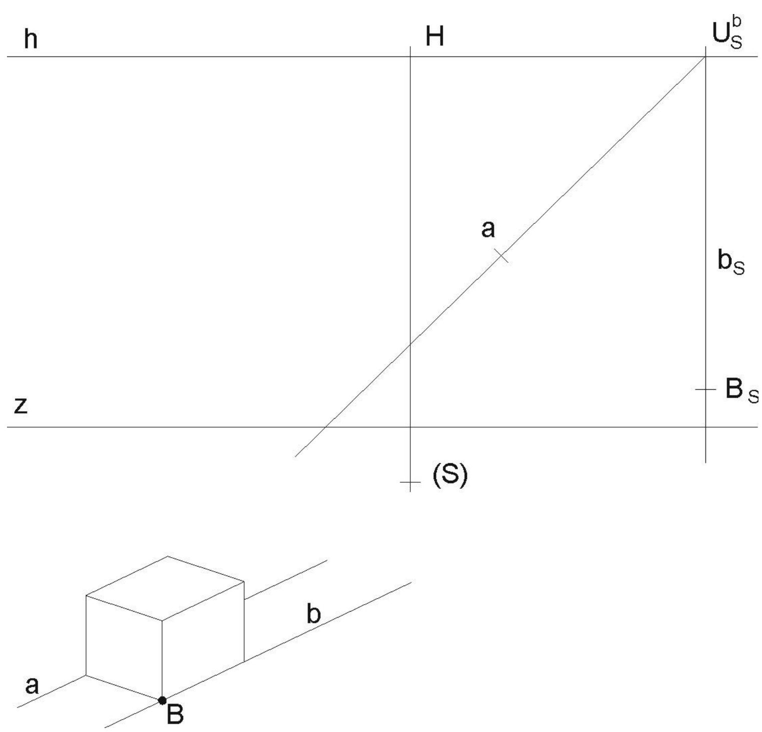
(6) Zjistěte skutečnou vzdálenost mezi bodem A a přímkou l, leží-li tyto útvary v půdorysně π.



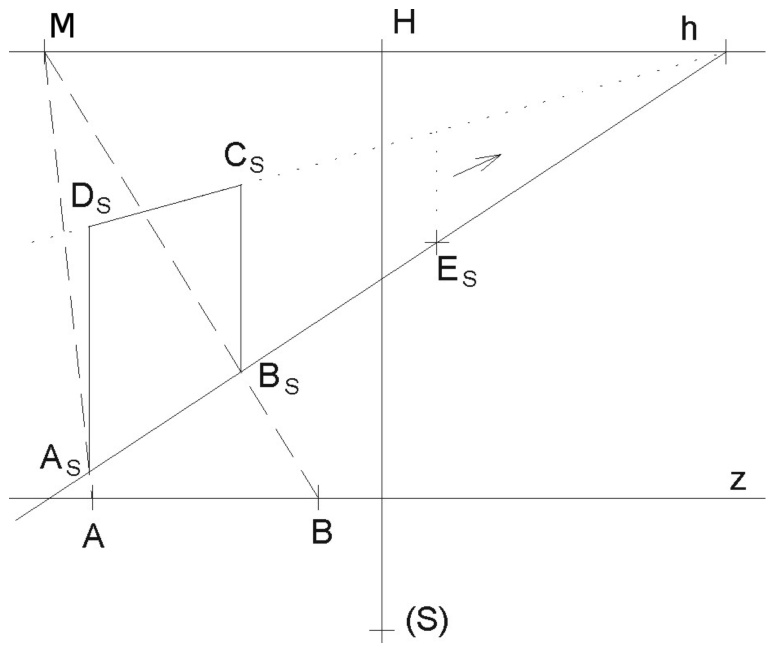
(7) Úběžník horizontální úsečky AB vychází mimo papír. Nastudujte princip „redukovaná distance“ a zjistěte skutečnou velikost této úsečky užitím tohoto principu.



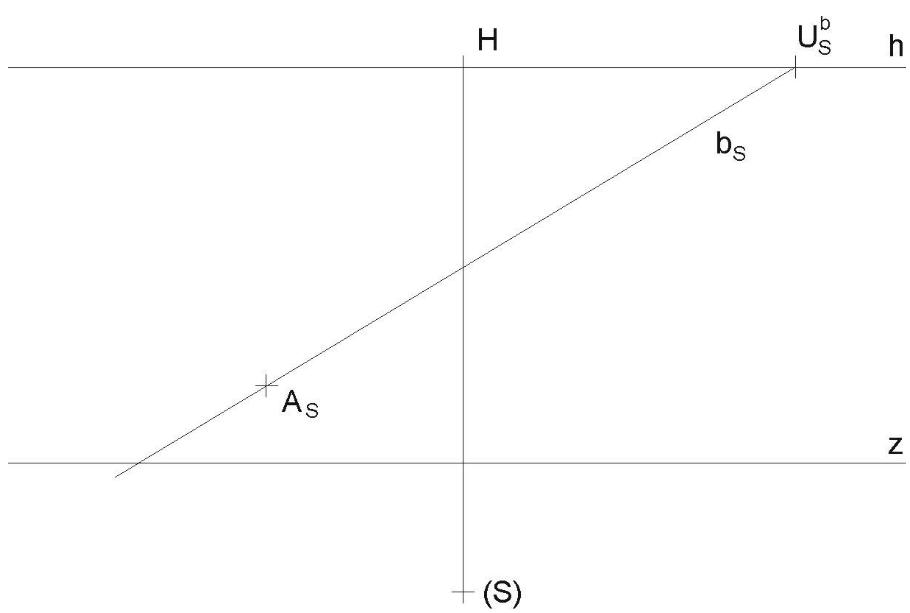
(8) Horizontální přímky a, b lze považovat za kolejnice. Sestrojte takovou krychli, která svými hranami „padne“ přesně na tyto kolejnice, tedy délka hrany krychle je rovna rozpětí mezi kolejnicemi (podle náčrtku). Je dána perspektiva jednoho vrcholu B_S této krychle.



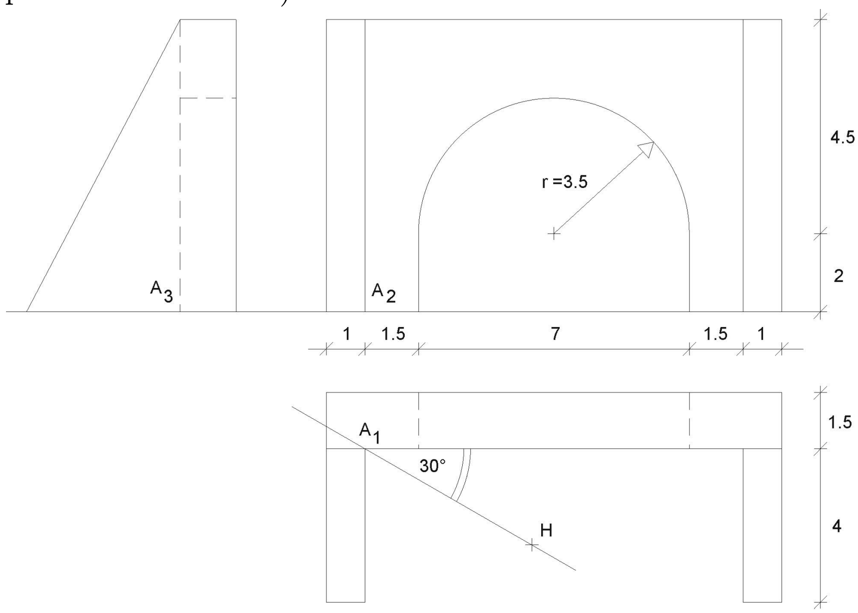
(9) Vertikální obdélník $A_S B_S C_S D_S$ přemístěte o trochu dále (stále nad přímkou b_s) do polohy začínající bodem E_S.

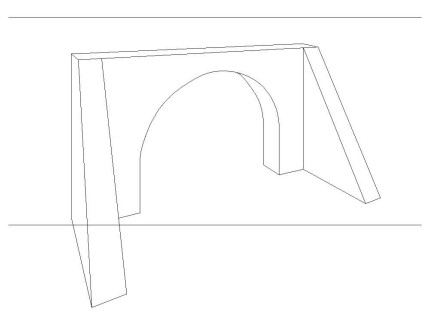


(10) Sestrojte horizontální síť čtvercových kachliček o rozměru hrany kachličky $3cm$, je-li dán výchozí vrchol A_S první kachličky, jejíž hrana leží na přímce b. Vykreslete aspoň $16(= 4 \cdot 4)$ kachliček, umístěných nalevo od přímky b_S. Užijte metody dělicích bodů a kontrolujte i úběžníkem společných úhlopříček těchto kachliček.



(11) Objekt je dán sdruženými průměty. Vertikální perspektivní průmětna je odkloněna od delší stěny o úhel 30°. Je dán hlavní bod H_1, velikost distance $d = 140$, výška horizontu $v = 80$. Veškeré kóty u pomocného obrázku jsou v metrech, měřítko je rovno poměru 1 : 100. Sestrojte perspektivu tohoto objektu (můžete kombinovat metodu sklopeného půdorysu i dělicích bodů). Rýsujte i neviditelné hrany (čárkovaně). Perspektivu kružnice sestrojte „metodou osmi tečen“ a připojte ještě další libovolné body kružnice metodou sítě (tvořenou čtverci) a sestrojte v některém z dalších bodů kružnice také tečnu. (Takovou sítí nejdříve pokryjte danou půlkružnici v pomocném obrázku.)





d=14
v=|HZ|
M=1:100
kóty v m

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „doplnit“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Petr Koplík
Typeset by LaTeX