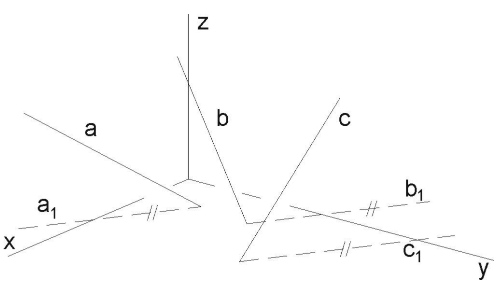
Test č. 5

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2009-2010

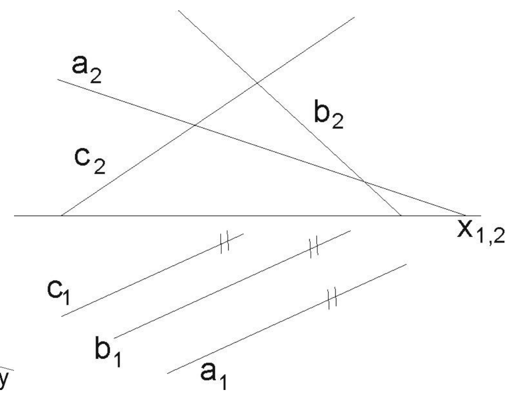
Zborcené plochy

Při vypracování úloh se využijí následující poznatky:

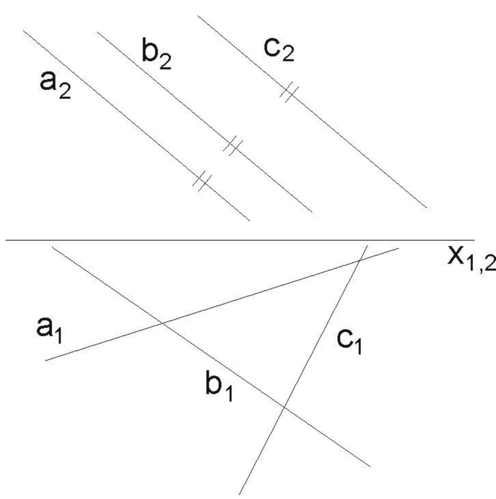
a) u plochy jednodílného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu je každá přímka jednoho systému přímek protínána všemi přímkami druhého systému přímek;
b) v každém bodě těchto ploch se kříží dvě různoběžné tvořící přímky plochy (jsou z opačných systémů přímek) a tyto různoběžky určují tečnou rovinu plochy s dotykovým bodem v jejich průsečíku;



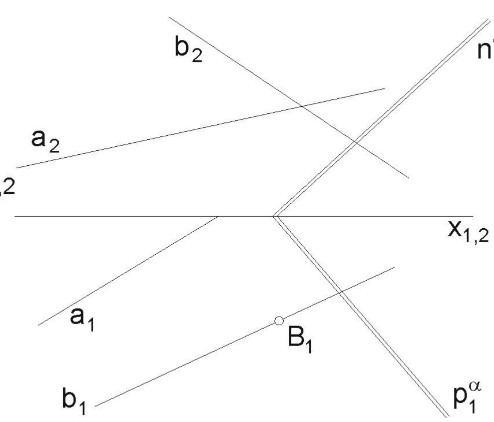
Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c



Obr. 2

(1) Jakou vzájemnou polohu zaujímají tři přímky a, b, c v axonometrickém zobrazení (obr. 1a), 1c)) a v Mongeově projekci (obr. 1b) ?

Poznámka: Jsou-li 3 přímky rovnoběžné s jistou rovinou, (ale mezi sebou zůstávají vzájemně mimoběžné), pak určují hyperbolický paraboloid. Takovou polohu mimoběžek nazýváme „komplanární“.

(2) Zborcená plocha je určena řídicí rovinou α a mimoběžkami a, b, podle obr. 2). Napište název této plochy a dále sestrojte v bodě B tečnou rovinu τ.

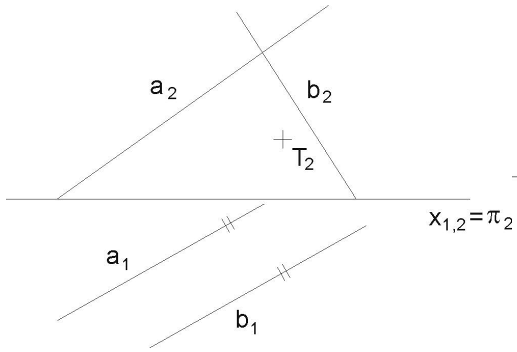
Návod: tečná rovina je tvořena přímkou b a přímkou z druhého (opačného) systému, zpravidla tedy čárkovanou. Dále platí: jsou-li dány dvě mimoběžné přímky plochy a řídicí rovina, pak přímky *druhého* systému (tudíž čárkované a v obr. nezadané), musí být rovnoběžné s danou řídicí rovinou.

Poznámka: zadaná řídicí rovina je dána kvůli možnosti tvořit přímky druhého, čárkovaného systému. V podstatě nahrazuje třetí přímku, která je nevlastní. Všechny přímky druhého regulu musí tuto nevlastní přímku protnout. Z toho plyne, že jsou rovnoběžné s řídící rovinou. Kdyby byla zadána řídicí rovina,patřící k systému přímek a, b, zborcená plocha by nebyla dostatečně určena.
Řídící rovinu, patřící k systému přímek a, b si sami kdykoli můžeme odvodit: zvolíme v prostoru pevný bod a tímto bodem vedeme rovnoběžky se zadanými přímkami a, b. Tyto nové přímky jsou různoběžné a určují rovinu, která je řídící rovinou systému s přímkami a a b.

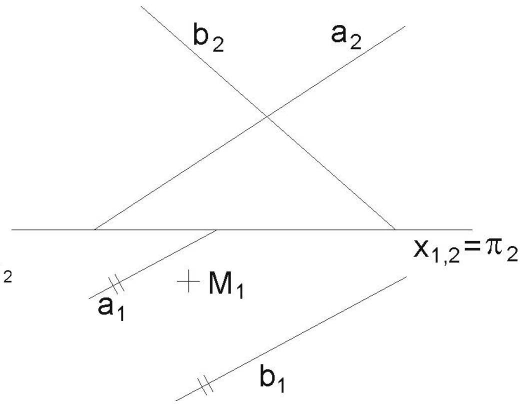
Jde tedy o to, vést bodem B přímku druhého (čárkovaného) systému, rovoběžně s řídicí rovinou α. Bodem B vedeme posunutou rovinu $\alpha' \parallel \alpha$ (zavedením hlavní přímky nové roviny α' některé osnovy bodem B). Po sestrojení stop nové roviny α', najdeme průsečík A druhé přímky a s rovinou α'. AB je přímka g čárkovaného systému, přímka je rovnoběžná s rovinou α. Takže nyní máme dvě různoběžky, protínající se v bodě B, které tvoří hledanou tečnou rovinu $\tau(b, g')$.

(3) Hyperbolický paraboloid je zadán průměty dvou mimoběžek a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), při čemž je $a_1 \parallel b_1$. Dále je dán T_2 bodu T, který leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys T_1 a přímky obou systémů procházejících bodem T. Podle obr. 3.

Návod: vedeme bodem T_2 přímku g' druhého systému, rovnoběžnou s řídicí rovinou π, takže g'_2 je rovnoběžná se základnicí. Odvodíme pomocí jejích průsečíků s přímkami a,b také půdorys g'_1 a na ordinále T_1. Bodem T procházejí po jedné přímce g' a c z každého systému. Přímku c_1 máme ihned: když $a_1 \parallel b_1$ je i $c_1 \parallel a_1 \parallel b_1$ (kvůli komplanaci u HP). Nárys c_2 přímky c odvodíme pomocí přímky m'. Přímka m' - čárkovaná ($\parallel \pi$), např. ležící přímo v π (tzn., že $m'_2 = x_{1,2}$ a m'_1 je spojnice půdorysných stopníků přímek a,b). Odvodíme nárys průsečíku m' a c – P_2^c a propojením s bodem T_2 získáváme nárys přímky c_2.



Obr. 3



Obr. 4

(4) Hyperbolický paraboloid je určen mimoběžkami a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), podle obr. 4. Přitom $a_1 \parallel b_1$. Odvoďte nárys bodu M_2, leží-li M na ploše, a je zadán jen svým půdorysem M_1.

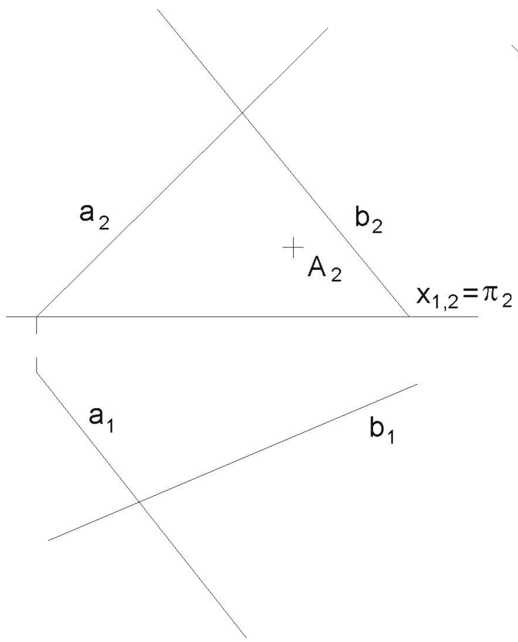
Návod: postupujeme podobně jako v 3. př.: nejdříve připravíme c_1, $M_1 \in c_1 \parallel b_1$. Dále v nárysе narýsujeme aspoň dvě přímky čárkované a odvodíme je do půdorysu. Vyhledáme v půdoryse dva průsečíky přímky c_1 s čárkovanými přímkami. Odvodíme tyto dva průsečíky do nárysu na čárkované přímky. Spojením těchto průsečíků v nárysе získáme i přímku c_2 a na ordinále bod M_2.

(5) Hyperbolický paraboloid je zde, podle obr. 5, zadán obecně: mimoběžkami a, b, které už nemají rovnoběžné první průměty, a řídicí rovinou π. Najděte půdorys bodu A, ležícího na ploše, je-li dán jeho nárys, a sestrojte tečnou rovinu v tomto bodě.

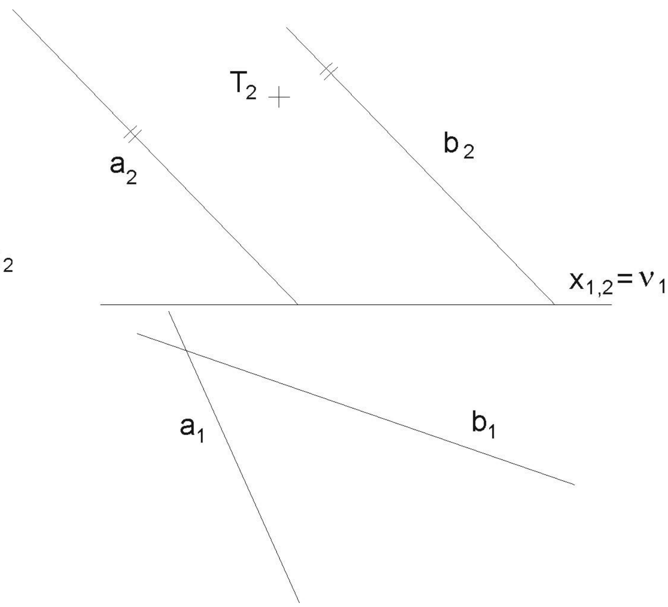
Návod: Vedeme bodem A_2 čárkovanou přímku g_2' rovnoběžnou se základnicí ($\parallel \pi$) a odvodíme její půdorys včetně půdorysu bodu A_1. S přímkou $A \in c$ to bude však složitější: její půdorys nemůžeme dokonce ani odhadnout (komplanace přímek a, b, c na ploše hyperbolického paraboloidu - i když v prostoru určitě existuje - je v prvním průmětu zastřena). Pomůžeme si jistou grafickou „lstí“ (je užívána i v literatuře a bez ní to ani nejde): na ploše tedy existují nyní vodorovné čárkované přímky (díky tomu, že π je jejich řídicí rovina). Jedna z čárkovaných přímek je sice vodorovná, ale navíc také kolmá k nárysně, nazveme ji $r' \perp \nu$. Stále - i zde - platí obecná věta: „*Všechny přímky nečárkovaného systému jsou protínány zase přímkami systému čárkovaného*“.Tato přímka r' proto nutně protíná přímky a, b (protože vzhledem k nim patří do opačného systému). Protože ale $r' \perp \nu$, jeví se v nárysе jen jako bod r_2'. Oba průsečíky přímek a, b s přímkou r', ačkoli jsou od sebe různé, se v nárysе promítají do jediného bodu r_2'. Ten tedy musí být společným průsečíkem nárysů a_2, b_2.

Dále platí, že i přímka c (procházející bodem A) musí protínat přímku r' a její nárys proto musí procházet také bodem r'_2, tedy $c_2 = r'_2.A_2$. Nárys přímky c již máme. Známe-li alespoň dvě čárkované přímky q', p', můžeme půdorys přímky c odvodit s jejich pomocí.

V bodě A se protínají přímky c a g'. Tyto přímky určují tečnou rovinu τ s bodem dotyku A s plochou. Najděte i stopy tečné roviny τ.



Obr. 5



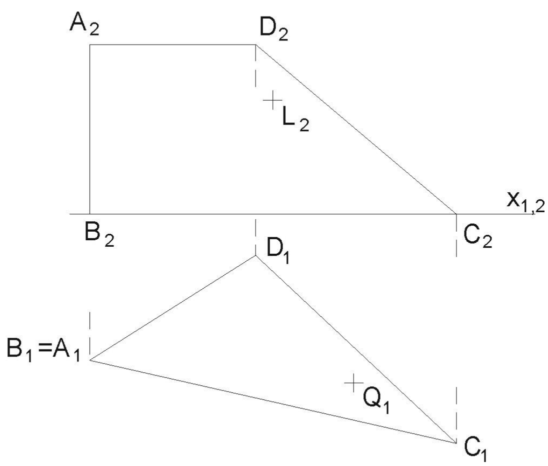
Obr. 6

(6) V obr. 6 je zadání hyperbolického paraboloidu trochu převrácené. Řídicí rovinou je nárysna ν a nárysy přímek a, b jsou spolu rovnoběžné. Dále je dán nárys bodu T. Odvoďte jeho půdorys a stopy tečné roviny pro tento dotykový bod T.

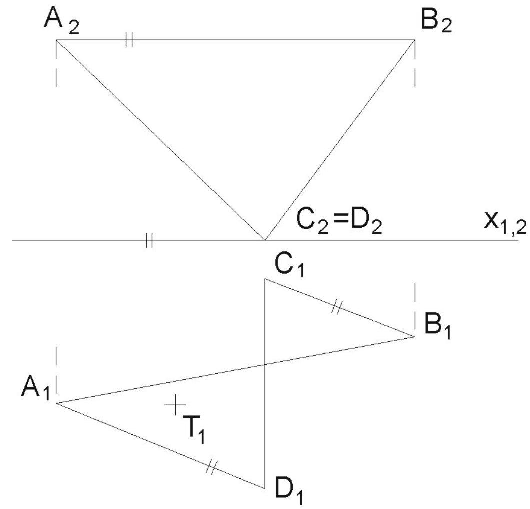
Poznámka: podrobný popis už neuvádíme, student by si měl postup odvodit podle předcházejících úloh.

(7) V obr. 7 je plocha hyperbolického paraboloidu určena zborceným čtyřúhelníkem A, B, C, D. Body L a Q leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys bodu L a chybějící nárys bodu Q.

Návod: vyzkoumejte polohy řídicích rovin a z toho vyplývající zákonitost pro průměty tvořících přímek obou systémů. Potom už snadno zavedete danými průměty bodů jednotlivé průměty tvořících přímek a k těmto průmětům pak přiřadíte i chybějící průměty přímek.



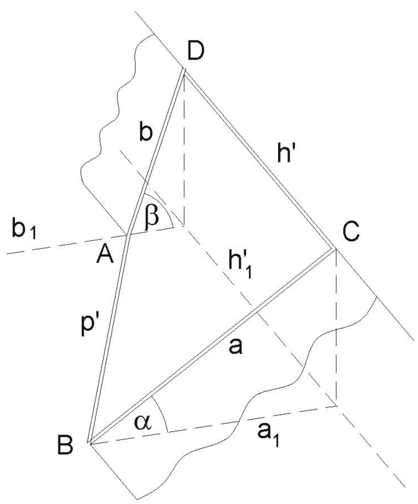
Obr. 7



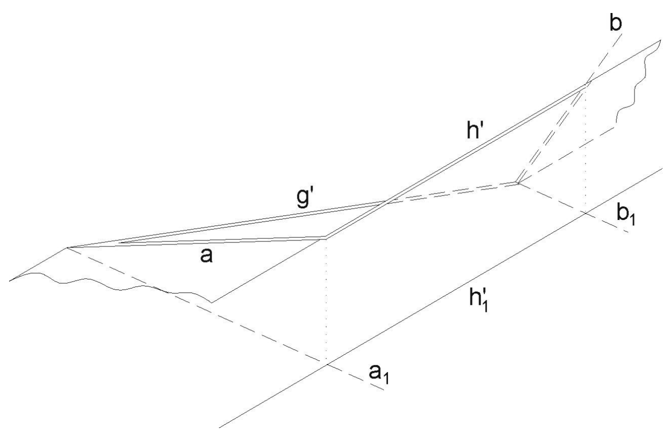
Obr. 8

(8) V obr. 8 si všimněte, že u zborceného čtyřúhelníka jsou strany AB a CD rovnoběžné s první průmětnou. Odvoďte chybějící průmět bodu T.

Zde končí základní úlohy na hyperbolický paraboloid a poznatky, uvedené v úvodu. Další příklady jsou již aplikace, v principu použitelné ve stavebnictví.



Obr. 9



Obr. 10

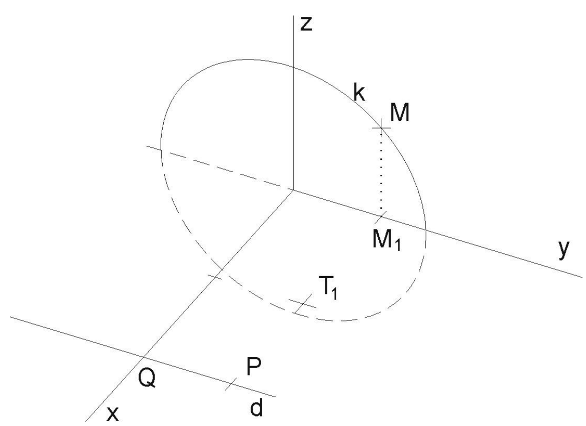
(9) V obr.9 je dána v axonometrii přechodová plocha *hyperbolického paraboloidu*, propojující dva profily různých sklonů a a b. Máte sestrojit 8 tvořících přímek každého systému.

Poznámka: podotýkáme, že další stavební uplatnění, tomuto blízké, můžeme nalézt při zastřešení, jsou-li vodorovný hřeben a okapová hrana ve vzájemně mimoběžné poloze.

(10) Stejný úkol Vás čeká v obr. 10. Jde jen o jiný axonometrický pohled na tuto přechodovou plochu, tvořenou zborceným (prostorovým) čtyřúhelníkem, jehož strany leží na přímkách, popsaných takto: nakloněné a, b, vodorovná g' je v půdorysně a h' je vodorovná, ale horní strana. U plochy takto natočené vzhledem k pozorovateli získáme navíc i křivku axonometrického obrysu (tou bude parabola, jako obalová křivka axonometrických průmětů tvořících přímek).

(11) Podle obr. 11 je zadán v kolmé axonometrii (axon. trojúhelník volte sami) *kruhový konoid*. Řídící kružnice k leží v souřadnicové rovině $y.z$, má střed S v počátku a poloměr $r = 30$, řídící přímka d prochází bodem $Q[50, 0, 0]$ a je rovnoběžná s osou y, řídící rovinou konoidu je nárysna $x.z$. Je dán ještě půdorys $T_1[25, 20, ?]$ bodu T, ležícího na ploše.

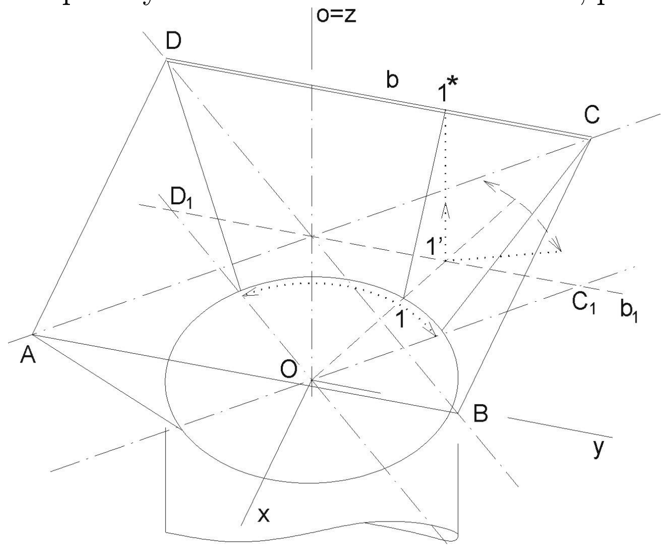
a) Odvoďte bod T (užitím tvořící přímky m plochy).
b) Sestrojte řez e rovinou $\alpha \in T$, $\alpha \parallel y.z$.
c) Dále sestrojte řez vertikální rovinou λ, volenou bodem T, ale různoběžnou se souřadnicovými rovinami.



Obr. 11

Návod:
ad a) Tvořící přímka m konoidu bude rovnoběžná s řídící rovinou $x.z$. Proto její půdorys m_1 bude procházet daným půdorysem T_1, rovnoběžně s osou x. Průsečík m_1 s půdorysem k_1 (na ose y) kružnice k označme M_1. Ordinálou odvodíme na kružnici nahoru bod M. Půdorys m_1 také protíná i řídící přímku d v bodě P (d a P leží v půdorysně). Propojením $m = PM$ získáme tvořící přímku m. Ordinálou

z půdorysu T_1 odvodíme na přímku m bod T.
ad b) Pro křivku e řezu v rovině, rovnoběžné s bokorysnou $y.z$ platí, že 3. průmět křivky e_3 bude afinně sdružený s kružnicí $k = k_3$ a osou afinity bude osa y.
ad c) křivku g řezu sestrojujeme postupně bodově, každý její bod jako průsečík jednotlivé tvořící přímky s rovinou řezu λ. Je to snadné, protože rovina λ je svislá.



Obr. 12

(12) Sestrojte v kolmé axonometrii, obr. 12, plochu násypky, tvořenou 4 díly (z nichž vždy dva a dva jsou symetrické) zborcené plochy *Montpellierského oblouku.* Každý takový díl je samostatně tvořen částí řídicí kružnice v půdorysně o středu v počátku, dále společnou řídicí přímkou $o = z$ a vodorovnou řídicí přímkou např. b (na ní leží strana vodorovného obdélníka). Jedná se tedy o přechodovou (ale nerozvinutelnou, zborcenou) plochu, propojující vodorovný obdélník či čtverec (vodorovná dvířka) s kružnicí (tj. ukončující svislé násypné potrubí). Máme tedy 4 Montpellierské oblouky, vzájemně na sebe navazující. Omezení a navázání na sebe u jednotlivých Montpellierských oblouků je ve svislých rovinách, procházejících úhlopříčkami AC, BD vodorovného obdélníka. Vaším úkolem je vyrýsovat tvořící přímky zborcené plochy ve všech 4 dílech. Přitom v každém dílu vyrýsujte nejméně 5 přímek, včetně krajních.

Návod: protože všechny tvořící přímky musí protínat i řídící přímku $o = z$ a ta je (v našem příkladu) kolmá k půdorysně, budou všechny půdorysy tvořících přímek procházet půdorysem přímky o, tedy počátkem. Budou proto prostými protahovanými průměry kružnice. Poznačíme si u nich očíslováním 1, 2, 3, … průsečíky s kružnicí. V průsečících (obdobně očíslovaných $1'$, $2'$, $3'$, …) , kde tyto půdorysy tvořících přímek protínají půdorys b_1 strany b obdélníka, povedeme vertikálně ordinály na stranu b obdélníka. Tyto nové průsečíky očíslujeme 1^*, 2^*, 3^*, … Získáme tak systém čísel např.: $1 + 1' + 1^*$. Postupně propojujeme jednotlivě body 1 a 1^*, atd. a tak obdržíme tvořící přímky plochy. Neviditelné úseky čárkujeme.

(13) V kolmé axonometrii $\triangle(100, 130, 120)$ sestrojte tvořící přímky zborcené plochy, jejíž řídící útvary jsou: kružnice v půdorysně π o středu $S[60; 60; 0]$, $r = 40$, přímka $p \parallel y$, jdoucí bodem $P[60; 60; 80]$, a řídící rovina $\nu(x, z)$. Určete název plochy a najděte přibližně 20 tvořících přímek.

Návod: protože tvořící přímky jsou rovnoběžné s řídící rovinou $x.z$, budou jejich p;dorysy rovnob26n0 s osou x. Tyto půdorysy budeme rýsovat v rozsahu řídící kružnice. Rovnoběžky s osou y klademe přibližně po 1 cm šířky mezi těmito půdorysy. Sestrojíme půdorys $p_1 \parallel y$.

Průsečíky půdorysů tvořících přímek s půdorydem přímky p_1 přeneseme po ordinálách na přímku p. Tyto body spojíme s průsečíky půdorysů příslušných tvořících přímek s řídící kružnicí (ta je přímo dána v půdoryse) a dostaneme tím axonometrické obrazy tvořících přímek.

Dbáme ovšem na to, aby při spojení takových bodů šlo vždy o body stejné y-ové vzdálenosti. Jenom tak splní tvořící přímka podmínku, že je rovnoběžná s řídící rovinou $x.z$.

Body na řídící přímce p s krajními hodnotami (min. a max. y-ová souřadnice) jsou kuspidální body.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „dodělat“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Typeset by LaTeX