

## Test č. 1

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST,  
letní semestr 2006-2007

### Kuželosečky, afinita a kolineace

- (1) (a) Je dána elipsa  $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ ,  $|F_1 F_2| < 2a$ . Sestrojte několik bodů elipsy, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě  $T \in \mathcal{E}$ , zkonstruuje kružnice z vět  $V_P, V_Q$ .
- (b) Je dána elipsa  $\mathcal{E}(A, B, e)$  a bod  $R$ . Sestrojte tečny z bodu  $R$  k elipse  $\mathcal{E}$ , určete body dotyku.
- (c) Je dána elipsa  $\mathcal{E}(A, B, e)$  a směr  $s$ . Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem  $s$  k elipse  $\mathcal{E}$ , určete body dotyku.
- (2) (a) Je dána hyperbola  $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ ,  $|F_1 F_2| > 2a$ . Sestrojte několik bodů hyperboly, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě  $T \in \mathcal{E}$ , zkonstruuje kružnice z vět  $V_P, V_Q$ .
- (b) Je dána hyperbola  $\mathcal{H}(F_1, F_2, A)$  a bod  $R$ . Sestrojte tečny z bodu  $R$  k hyperbole  $\mathcal{H}$ , určete body dotyku.
- (c) Je dána hyperbola  $\mathcal{H}(A, B, e)$  a směr  $s$ . Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem  $s$  k hyperbole  $\mathcal{H}$ , určete body dotyku.
- Poznámka: Úloha nemá řešení pro směr  $s$ , pokud  $s'$ , kde  $s' \parallel s$ ,  $S \in s$ , neleží v úhlu asymptot obsahující vedlejší osu hyperboly  $\mathcal{H}$ .*
- (3) (a) Je dána parabola  $\mathcal{P}(F, d)$ . Sestrojte několik bodů paraboly, hyperoskulační kružnici, tečnu v libovolném bodě  $T \in \mathcal{E}$ , zkonstruuje přímky z vět  $V_P, V_Q$ .
- (b) Je dána parabola  $\mathcal{P}(F, d)$  a bod  $R$ . Sestrojte tečny z bodu  $R$  k parabole  $\mathcal{P}$ , určete body dotyku.
- (c) Je dána parabola  $\mathcal{P}(F, d)$  a směr  $s$ . Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem  $s$  k parabole  $\mathcal{P}$ , určete body dotyku.

- (4) K pravidelnému pětiúhelníku  $ABCDE$  najděte afinní  $A'B'C'D'E'$ . Afinita je stanovena osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$ .
- (5) Ve středové kolineaci (určené středem  $S$ , osou  $o$ , dvojicí bodů  $A, A'$ ) najděte k pravidelnému šestiúhelníku  $ABCDEF$  kolineární.
- (6) Ve středové kolineaci  $(S, o, u \rightarrow \infty u')$  sestrojte odpovídající přímky k přímkám  $a, b, c$ . (Poloha přímky  $a$  vůči ose  $o$  je různoběžná,  $b$  je s osou rovnoběžná,  $c$  je k ose kolmá), kde  $u$  je úběžnice, k níž koresponduje nevlastní přímka  $\infty u'$  roviny.
- (7) Elipsa je určena sdruženými průměry  $KL, MN$ . Pomocí afinity sestrojte k nenarýsované elipse tečny z vnějšího bodu  $R$ .
- (8) Elipsa je určena sdruženými průměry  $KL, MN$ . Pomocí afinity sestrojte k nenarýsované elipse tečny tak, aby byly rovnoběžné s daným směrem  $s$ .

*Elipse  $e$  určené sdruženými průměry  $KL, MN$  přiřadíme afinně kružnici  $e'$  (např. nad průměrem  $KL$ , tedy  $K \equiv K', L \equiv L'; M \rightarrow M'$ ). Osa afinity  $o \equiv KL$  a dvojice odpovídajících bodů  $M, M'$  určují afinitu.*

- (9) Elipsa je dána sdruženými průměry. Vyrýsujte elipsu (*Rytzova konstrukce os elipsy*).

**I. Elipsa:** Elipsa  $\mathcal{E}$  je množina všech bodů v  $\mathbb{E}_2$ , které mají od dvou pevných (různých) bodů v  $\mathbb{E}_2$ , zvaných ohniska (značíme  $F_1, F_2$ ) stálý součet vzdáleností rovný  $2a$ , který je větší než vzdálenost obou ohnisek.

**Věta<sub>T</sub>:** V každém bodě  $\mathcal{E}$  existuje právě jedna tečna. Tečna pólí *vnější úhel průvodičů* (tečnu značíme obvykle  $t$ , dotkový bod  $T$ ). Normála  $n$  je kolmá na tečnu  $t$  v bodě  $T$  a pólí *vnitřní úhel průvodičů*.

**Věta<sub>P</sub>:** Množina pat  $P$  kolmic spuštěných z ohnisek elipsy  $\mathcal{E}$  na její tečny je *vrcholová* kružnice  $k(S, a)$ .

**Věta<sub>Q</sub>:** Množina bodů  $Q$  souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy  $\mathcal{E}$  (například  $F_1$ ) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku ( $F_2$ ) a poloměrem  $r = 2a$ . Přitom platí  $T \in QF_2$ .

**II. Hyperbola:** Hyperbola  $\mathcal{H}$  je množina všech bodů v  $\mathbb{E}_2$ , které mají od dvou pevných (různých) bodů v  $\mathbb{E}_2$ , zvaných ohniska (značíme  $F_1, F_2$ ) stálý rozdíl vzdáleností rovný  $2a$ , který je menší než vzdálenost obou ohnisek.

**Věta<sub>T</sub>:** V každém bodě  $\mathcal{H}$  existuje právě jedna tečna. Tečna pólí *vnější úhel průvodičů* (tečnu značíme obvykle  $t$ , dotkový bod  $T$ ). Normála  $n$  je kolmá na tečnu  $t$  v bodě  $T$  a pólí *vnitřní úhel průvodičů*.

**Věta<sub>P</sub>:** Množina pat  $P$  kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly  $\mathcal{H}$  na její tečny je *vrcholová* kružnice  $k(S, a)$ .

**Věta<sub>Q</sub>:** Množina bodů  $Q$  souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly  $\mathcal{H}$  (například  $F_1$ ) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku ( $F_2$ ) a poloměrem  $r = 2a$ . Přitom platí  $T \in QF_2$ .

**III. Parabola:** Parabola  $\mathcal{P}$  je množina všech bodů v  $\mathbb{E}_2$ , které mají od pevného bodu  $F$  v  $\mathbb{E}_2$ , zvaného ohnisko, a pevné přímky  $d$ , zvané řídící přímka, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.

**Věta<sub>T</sub>:** V každém bodě  $\mathcal{P}$  existuje právě jedna tečna. Tečna pólí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle  $t$ , dotykový bod  $T$ ). Normála  $n$  je kolmá na tečnu  $t$  v bodě  $T$  a pólí vnitřní úhel průvodičů.  $\implies t_V \parallel d$

**Věta<sub>P</sub>:** Množina pat  $P$  kolmic spuštěných z ohniska  $F$  paraboly  $\mathcal{P}$  na její tečny je vrcholová tečna  $t_V$ .

**Věta<sub>Q</sub>:** Množina bodů  $Q$ , souměrně sdružených s ohniskem  $F$  podle tečen paraboly  $\mathcal{P}$ , je řídící přímka  $d$ .

**Věta:** Subtangentu je půlena vrcholem  $V$ .

**Věta:** Délka subnormály je rovna velikosti parametru  $p$ .

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „doplnit“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík  
RNDr. Jana Slaběňáková  
Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X