VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

APLIKACE DIFERENCIÁLNÍHO POČTU V TECHNICE

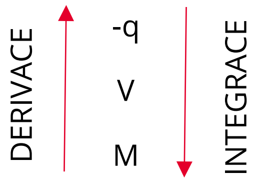
Vnitřní síly na prostém nosníku

BRNO 2022

Kristýna Šoupalová

ÚVOD

Při řešení těchto úloh budeme vycházet z derivačně integračního schématu, které popisuje vztahy mezi zatížením, posouvající silou a ohybovým momentem.



$$\frac{dV}{dx} = -q \qquad \int q dx = -V$$

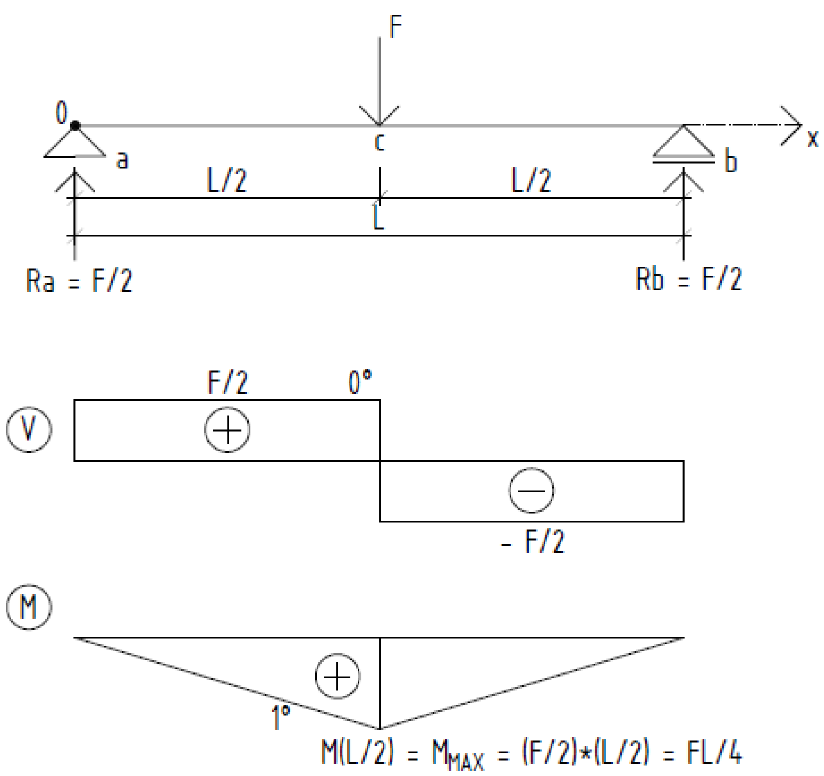
$$\frac{dM}{dx} = V \qquad \int V dx = M$$

kde q … intenzita spojitého rovnoměrného zatížení

V … posouvající síla

M … ohybový moment

1. PROSTÝ NOSNÍK ZATÍŽENÝ OSAMĚLOU SILOU V POLOVINĚ ROZPĚTÍ



Budeme uvažovat souřadný systém, který má počátek v podpoře a.

Nejprve si určíme reakce. Obecně ze dvou momentových podmínek rovnováhy ($\Sigma M_a = 0$, $\Sigma M_b=0$), resp. jedné momentové a jedné silové podmínky rovnováhy (např. $\Sigma M_a = 0$, $\Sigma F_z = 0$). V tomto případě to není nutné, protože se jedná o velmi jednoduchý případ, kdy $R_a = R_b = F/2$.

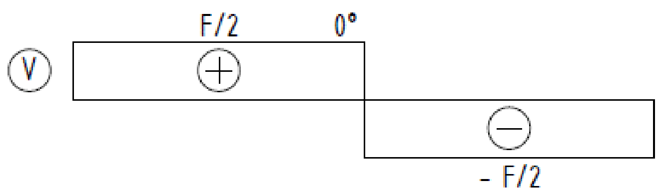
Po určení reakcí si vykreslíme diagramy vnitřních sil – posouvající síly V a ohybového momentu M.

U posouvající síly je zřejmé, že se mění pouze v bodě c, kde na nosník působí osamělá síla.

U ohybového momentu určíme hodnotu v polovině rozpětí jako reakci v podpoře a, resp. B, krát rameno L/2.

Poté si vyjádříme průběh vnitřních sil pomocí funkcí proměnné x.

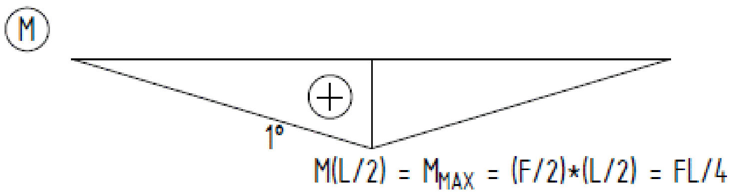
Funkce posouvající síly není spojitá, a proto si ji budeme muset vyjádřit ve dvou intervalech, na kterých spojitá je.



$V(x) = \frac{F}{2}$ pro $0 < x < \frac{L}{2}$

$V(x) = -\frac{F}{2}$ pro $\frac{L}{2} < x < L$

To stejné provedeme u ohybového momentu. Budeme ho určovat zleva, tj. od podpory a. Jde o to, aby rovnice momentu vyhovovala pro libovolný bod na ose x.



$M(x) = \frac{F}{2} \cdot x$ pro $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

$$M(x) = \frac{F}{2} \cdot x - F \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) = -\frac{F}{2} \cdot x + \frac{FL}{2}$$

pro $\frac{L}{2} \leq x \leq L$

Do poloviny rozpětí se na velikosti momentu podílí pouze reakce R_a, u které se mění rameno od hodnoty 0 po hodnotu L/2. Za polovinou rozpětí figuruje ve velikosti momentu i osamělá síla F. Toto musíme v předpisu fuknce momentu zohlednit. Reakce R_a a síla F mají opačný směr působení, proto se v rovnici momentu odečítají. Síla F začíná přispívat až od L/2, proto musíme od našeho libovolného ramena x tuto hodnotu odečíst.

Můžeme si ověřit, že jsme funkci momentu zapsali správně tím, že za x dosadíme např. L/2. Tomuto x vyhovují oba naše předpisy.

$$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{F}{2} \cdot x = \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{FL}{4}$$

$$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{F}{2} \cdot x - F \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} - F \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4}$$

Dosadíme-li do druhého předpisu pro moment hodnotu L, měla by nám vyjít nulová hodnota.

$$M(x = L) = \frac{F}{2} \cdot x - F \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{F}{2} \cdot L - F \cdot \left(L - \frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{2} - \frac{FL}{2} = 0$$

Nyní se přesuneme k důkazu, že derivačně integrační schéma je pravdivé, tj. ověříme, že derivace M podle x se rovná V, resp. integrace V podle dx je rovna M.

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$V(x) = \frac{d\left(\frac{F}{2} \cdot x\right)}{dx} = \frac{F}{2}$ pro $0 < x < \frac{L}{2}$

$V(x) = \frac{d\left(\frac{F}{2} \cdot x - F \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)\right)}{dx} = \frac{F}{2} - F \cdot (1 - 0) = \frac{F}{2} - F = -\frac{F}{2}$ pro $\frac{L}{2} < x < L$

A naopak.

$$\int V(x)dx = M(x)$$

$M(x) = \int \frac{F}{2} dx = \frac{F}{2} \cdot x + c$ pro $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

$M(x) = \int -\frac{F}{2} dx = -\frac{F}{2} \cdot x + c$ pro $\frac{L}{2} \leq x \leq L$

Zde ještě musíme určit konstanty c pomocí okrajových podmínek. Okrajové podmínky budou pro nás způsob uložení nosníku. Jak víme ze stavební mechaniky, ohybový moment v kloubové podpoře je nulový. Z této známé hodnoty určíme velikost integrační konstanty c tak, aby toto bylo splněno.

pro x = 0 (kloubová podpora a) M(x=0) = 0 potom

$M(x = 0) = \frac{F}{2} \cdot x + c = \frac{F}{2} \cdot 0 + c = 0$ => $c = 0$

=> $M(x) = \frac{F}{2} \cdot x$ pro $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

pro x = L (kloubová podpora b) M(x=0) = 0 potom

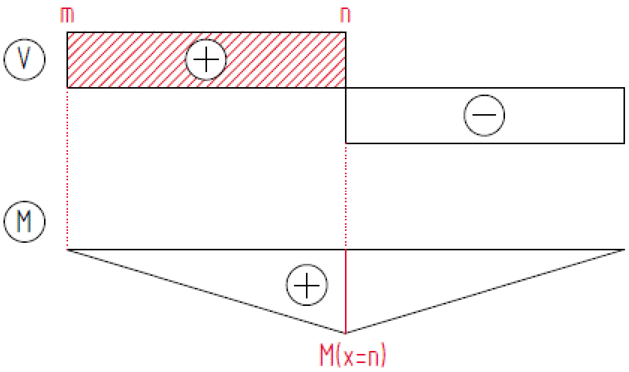
$M(x = L) = -\frac{F}{2} \cdot x + c = -\frac{F}{2} \cdot L + c = 0$ => $c = \frac{F}{2} \cdot L$

=> $M(x) = -\frac{F}{2} \cdot x + \frac{F}{2} \cdot L$ pro $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

Praktický tip:

Při řešení vnitřních sil je výhodné využívat i určitý integrál. Určitý integrál posouvající síly na daném intervalu se rovná hodnotě ohybového momentu v místě, kde tento interval končí. Samozřejmě si musíme vybrat interval, na kterém je funkce posouvající síly spojitá.

$$\int_m^n V(x) = M(x = n)$$

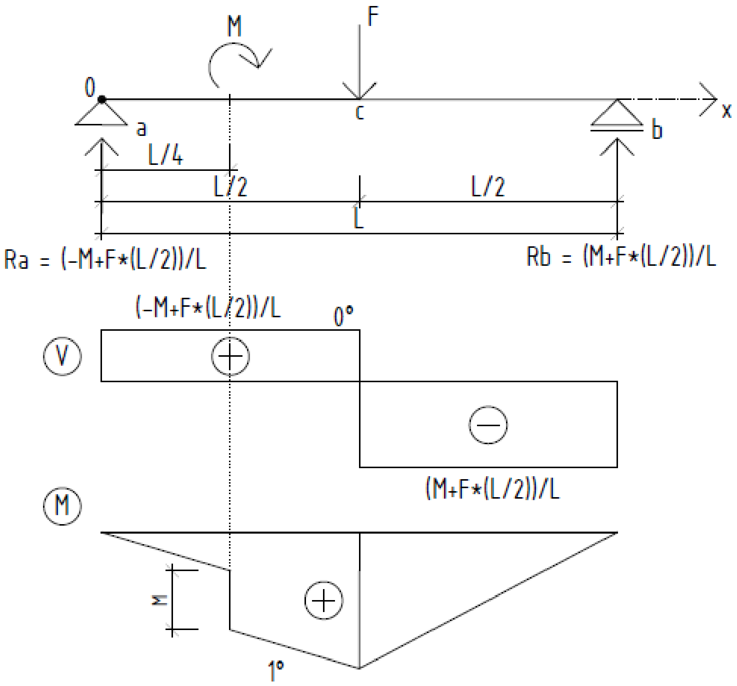


Ukažme si to na příkladu. Řekněme, že nás zajímá moment v polovině rozpětí, tzn. náš interval bude od x = 0 po x = L/2.

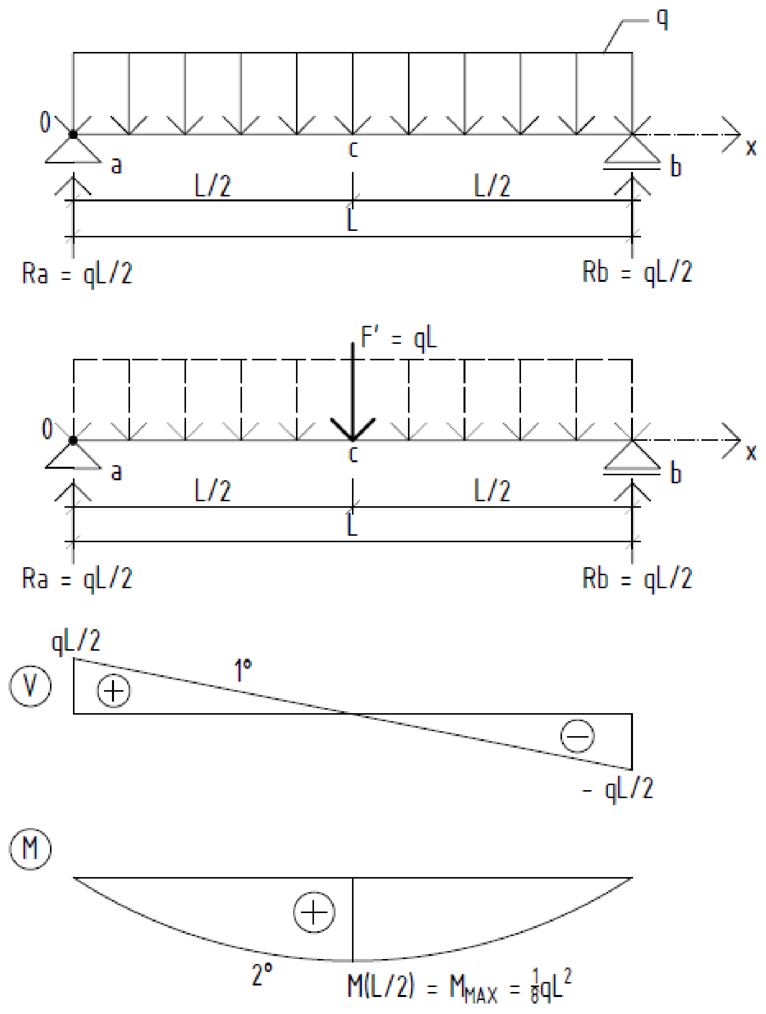
$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{F}{2} dx = \left[\frac{F}{2} \cdot x\right]_0^{\frac{L}{2}} = \left[\frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{F}{2} \cdot 0\right] = \frac{FL}{4} = M\left(x = \frac{L}{2}\right)$$

Zjednodušeně řečeno – plocha obrazce posouvající síly je hodnota momentu. U jednoduchých obrazců můžeme vynechat integrály a spočítat obsahy dle jednoduchých vzorečků. V tomto konkrétním případě je to obsah obdélníku o výšce F/2 a délce L/2.

POZOR na osamělé momenty mají vliv na průběh ohybového momentu, který skokově mění!



2. PROSTÝ NOSNÍK ZATÍŽENÝ ROVNOMĚRNÝM SPOJITÝM ZATÍŽENÍM PO CELÉ DÉLCE

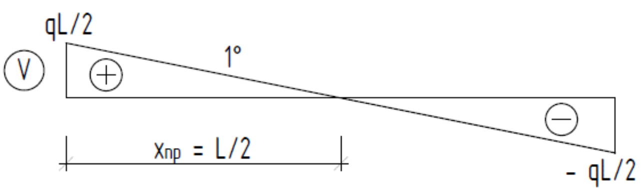


Ve druhém případě budeme uvažovat prostý nosník se spojitým rovnoměrným zatížením po celé délce.

Pro výpočet reakcí si spojité zatížení nahradíme náhradním břemenem F‘ = qL v polovině rozpětí (bod c). Z toho se nám opět stává primitivní případ pro výpočet reakcí, kdy vychází $R_a = R_b = qL/2$.

Po určení reakcí můžeme vykreslit průběh vnitřních sil. Zatížení q je konstantní, jinak řečeno přímka nultého stupně, posouvající síla V je lineární přímka prvního stupně a ohybový moment parabola druhého stupně. Toto opět vychází z derivačně integračního schématu.

Nyní přejděme k vyjádření vnitřních sil pomocí souřadnice x. Budeme postupovat analogicky jako v předcházejícím příkladu. Nyní je však výhodou to, že V i M jsou spojité funkce, nebudeme je tedy muset dělit na intervaly.



$$V(x) = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x$$

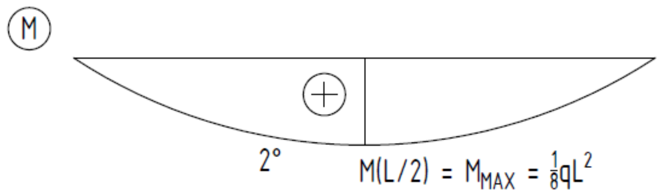
Postupujme zleva. Hlavní složkou posouvající síly je reakce v podpoře a. Od této hodnoty se postupně odečítá čím dál větší hodnota spojitého zatížení – proto člen ‘– qx‘. Ověřme si správnost dosazením za x. Zvolíme si x, kde je nám hodnota V známá, např. v x = L víme, že V = – qL/2 .

$$V(x = L) = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot L = \frac{-q \cdot L}{2}$$

Můžeme určit i tzv. nebezpečný průřez x_{np}, kde je V = 0 a M = MAX. Toto určíme jednoduše – stačí námi vytvořený předpis V položit rovno 0.

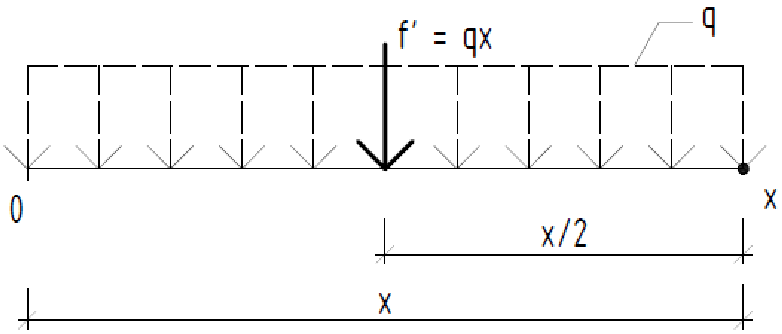
$$\frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x = 0 \Rightarrow x_{np} = \frac{L}{2}$$

Teď přejdeme k ohybovému momentu M.



$$M(x) = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$
$$= \frac{q}{2} \cdot L \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2$$
$$= \frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2)$$

Tady vypadá vzorec hrozivě, ale vůbec není tak složitý na sestavení, jak by se mohlo zdát. Při sestavení opět postupuje z levého konce nosníku. První člen představuje reakci R_a krát rameno – souřadnici x, kde určujeme ohybový moment. Druhý člen se také skládá ze dvou částí – ‘qx‘ je velikost náhradního břemene f‘ dané části konstantního zatížení, člen ‘x/2‘ představuje rameno, na kterém toto náhradní břemeno působí. Nejlépe je sestavení této části rovnice ohybového momentu patrné z obrázku:



Znaménko mínus je z důvodu opačného smyslu reakce a zatížení. Pár jednoduchými úpravami vytvoříme ‚pěknější vzorec‘, do kterého můžeme opět zkusit dosadit libovolné x, ve kterém známe hodnotu M, pro kontrolu. Uvažujme opět x = L, kde M se má rovnat nule.

$$M(x = L) = \frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) = \frac{q}{2} \cdot (L \cdot L - L^2) = \frac{q}{2} \cdot (L^2 - L^2) = 0$$

Nyní se opět vrátíme k derivačně integračnímu schématu. Začněme s tím, že derivace funkce ohybového momentu M podle x se rovná funkci posouvající síly V.

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$V(x) = \frac{d\left(\frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2)\right)}{dx} = \frac{q}{2} \cdot (L - 2 \cdot x) = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x$$

Tady můžeme ještě využít znalosti, že maximum funkce je v místě, kde se její derivace rovná nule. Tímto můžeme nalézt maximum ohybového momentu. Derivace ohybového momentu je posouvající síla. Hledáme tedy místo, kde je posouvající síla rovna nule. Toto je podvědomě známo, protože o pár řádků výše jsme díky tomu určili nebezpečný průřez.

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x = 0 \qquad => \qquad x = \frac{L}{2}$$

A hodnota ohybového momentu v tomto místě je jasná po dosazení našeho nalezeného x.

$$M\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) = \frac{q}{2} \cdot \left(L \cdot \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{q \cdot L^2}{4} - \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{1}{8} \cdot q \cdot L^2$$

Zároveň jsme si i ukázali, z čeho vznikl všem známý vzoreček na výpočet momentu od spojitého rovnoměrného zatížení – $M = \frac{1}{8} \cdot q \cdot L^2$.

A naopak ověříme, že integrace funkce posouvající síly podle x se rovná funkci ohybového momentu.

$$\int V(x)dx = M(x)$$

$$M(x) = \int \left(\frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x\right) dx = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 + c$$

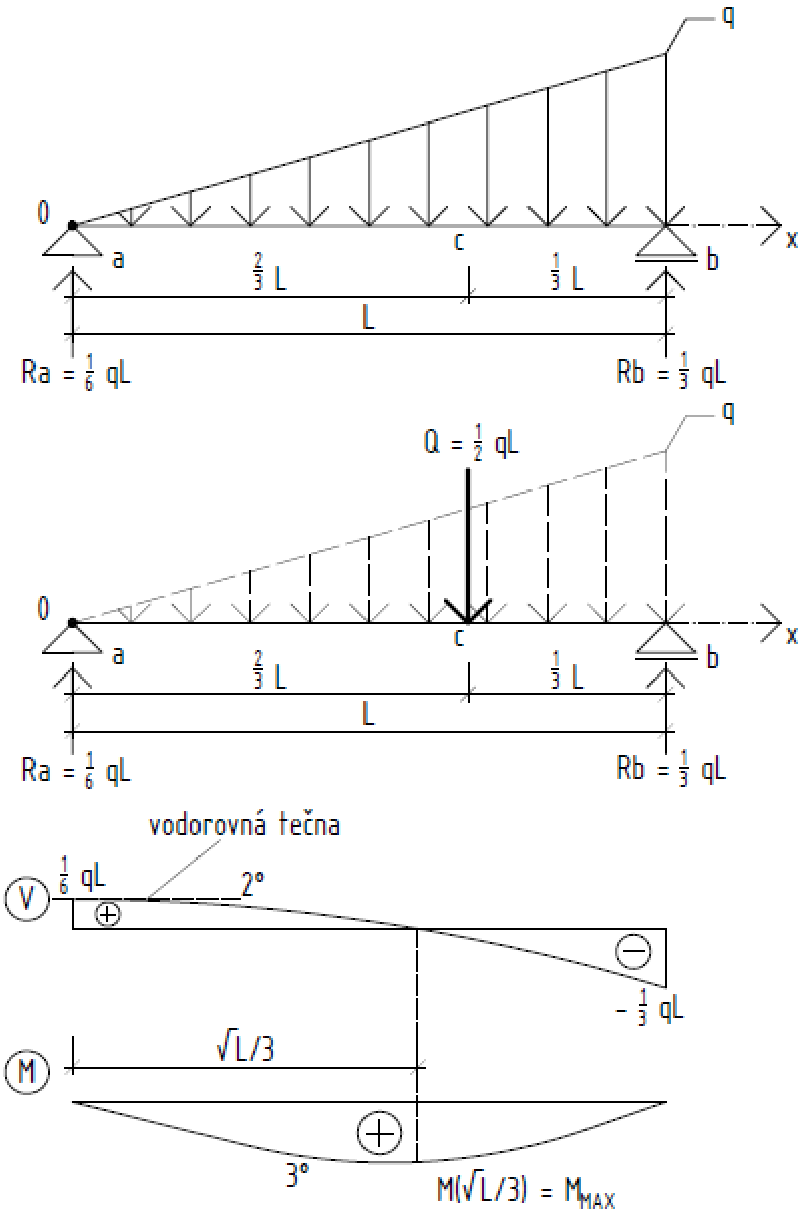
Zase musíme určit integrační konstantu c s pomocí okrajových podmínek. Víme, že v kloubové podpoře je nulový moment – můžeme psát, že v x = 0 je M = 0.

pro x = 0 (kloubová podpora a) M(x=0) = 0 potom

$$M(x = 0) = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 + c = \frac{q \cdot L}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 0 + c = 0 \qquad => \qquad c = 0$$

$$=> \qquad M(x) = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2$$ ✓

3. PROSTÝ NOSNÍK ZATÍŽENÍ SPOJITÝM TROJÚHELNÍKOVÝM ZATÍŽENÍM



Ve třetím a posledním případě si přiblížíme výpočet prostého nosníku se spojitým trojúhelníkovým zatížením.

Nejdříve si trojúhelníkové zatížení nahradíme břemenem Q, jehož velikost je obsah obrazce zatížení a jeho pozice je v těžišti obrazce.

$$Q = \frac{1}{2} \cdot q \cdot L$$

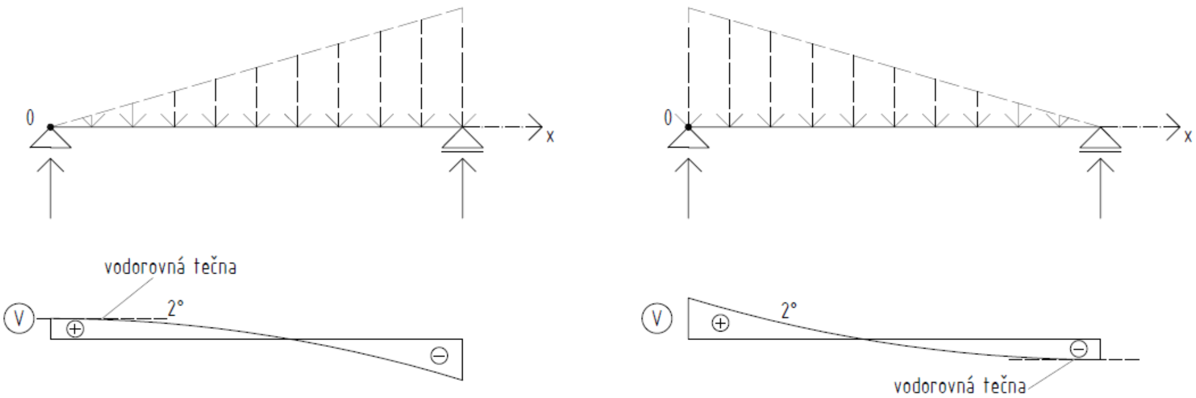
Následně spočítáme reakce Ra a Rb a to tím způsobem, že Q rozdělíme v poměru vzdáleností od podpor. V podpoře a, která je vzdálenější od náhradního břemene, tedy bude reakce odpovídající 1/3 Q a v podpoře b, která se nachází blíže od působiště náhradní síly, bude reakce 2/3 Q.

$$R_a = \frac{1}{3} \cdot Q = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot L = \frac{1}{6} \cdot q \cdot L$$

$$R_b = \frac{2}{3} \cdot Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot L = \frac{1}{3} \cdot q \cdot L$$

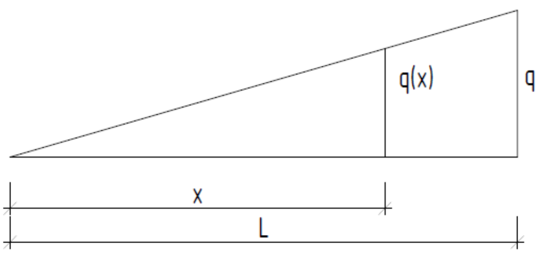
Opět vykreslíme vnitřní síly. Zatížení je lineární přímka (1°), z čehož plyne, že posouvající síla bude parabola (2°) a ohybový moment bude kubická parabola (3°).

U posouvající síly bych chtěla poukázat na to, že funkce bude v tomto případě konkávní = vydutá (∩) a to proto, že vodorovná tečna je v tom místě, kde je intenzita zatížení rovna nule. Kdyby bylo trojúhelníkové zatížení zrcadlově překlopeno, funkce by byla konvexní = vypouklá (∪) a vodorovná tečna by byla v místě podpory b. Toto je patrné z náčrtku pod tímto textem.



Ohybový moment bude mít maximum v místě, kde je posouvající síla rovna nule.

V tomto příkladě začneme jinak. Nejprve musíme obecně určit funkci zatížení pro libovolný bod na nosníku. Tento krok děláme proto, že zatížení není po délce konstantní. Využijeme podobnosti trojúhelníků a určíme hodnotu q(x) v libovolném bodě x.



$$\frac{q}{L} = \frac{q(x)}{x} \;\Rightarrow\; q(x) = \frac{q \cdot x}{L}$$

Dále můžeme určit posouvající sílu jako integrál z mínusové hodnoty funkce zatížení.

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \;\Rightarrow\; V(x) = \int -q(x)dx$$

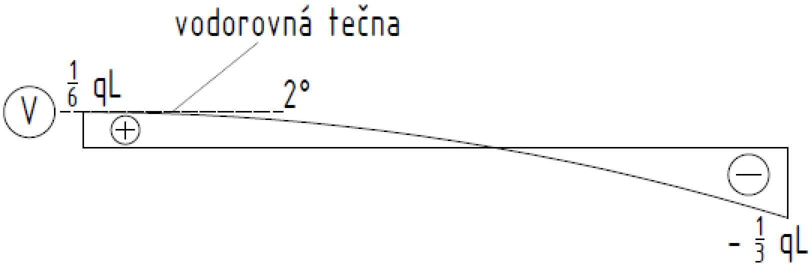
$$V(x) = \int -q(x)dx = -\int \frac{q \cdot x}{L}dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot x^2}{L} + c$$

Konstantu c budeme opět určovat z okrajových podmínek. Podíváme se do vykresleného obrazce posouvající síly a vybereme si libovolný bod, ve kterém známe přesnou hodnotu, např. v podpoře a, kde je x=0.

pro x = 0 $V(x=0)=\frac{1}{6}\cdot q\cdot L$ potom

$V(0)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L}+c=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot 0}{L}+c=\frac{1}{6}\cdot q\cdot L$ => $c=\frac{1}{6}\cdot q\cdot L$

=> $V(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L$



Můžeme pro kontrolu za x dosadit L a přesvědčit se, že předpis je správně.

$V(x=L)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot L^2}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L=-\frac{1}{2}\cdot q\cdot L+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L=-\frac{1}{3}\cdot q\cdot L$

V tomto případě je patrné, kde se nachází a jakou hodnotu má maximum posouvající síly. Můžeme si však demonstrovat, jak to lze určit více matematicky. Maximum posouvající síly bude v bodě, kde její derivace (což je funkce zatížení) je rovna nule.

$\frac{dV(x)}{dx}=-q(x)=\frac{-q\cdot x}{L}=0$ => x=0

$$V(x=0)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot 0}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L=\frac{1}{6}\cdot q\cdot L$$

Nakonec určíme funkci ohybového momentu jako integrál z posouvající síly.

$$\int V(x)dx=M(x)$$

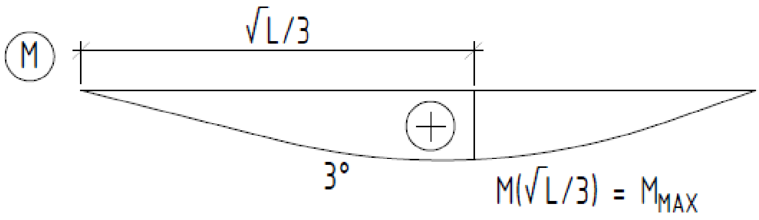
$$M(x)=\int V(x)dx=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L\right)dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^3}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot x+c$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot x^3}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot x+c$$

Konstanta c opět pomocí okrajových podmínek.

pro x = 0 (kloubová podpora a) M(x=0) = 0 potom

$$M(x=0)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot x^3}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot x+c=-\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot 0}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot 0+c=0$$

=> c=0 => $M(x)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot x^3}{L}+\frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot x$



Správnost opět můžeme ověřit dosazením za x. Můžeme dosadit x=L a víme, že výsledek musí dát 0 – je to patrné z obrázku průběhu ohybového momentu.

$$M(x=L) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot x^3}{L} + \frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot x = -\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot L^3}{L} + \frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot L = -\frac{1}{6}\cdot q\cdot L^2 + \frac{1}{6}\cdot q\cdot L^2 = 0$$

Obdobně můžeme určit pozici a hodnotu maximálního ohybového momentu. Opět je to tam, kde je derivace (posouvající síla) rovna 0.

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L} + \frac{1}{6}\cdot q\cdot L = 0$$

=> $-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L} + \frac{1}{6}\cdot q\cdot L = 0$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\cdot x^2}{L} = -\frac{1}{6}\cdot q\cdot L$$

$$x^2 = \frac{2\cdot q\cdot L^2}{6\cdot q}$$

$x^2 = \frac{L^2}{3}$ => $x = \frac{\sqrt{L}}{3}$

$$M\left(x=\frac{\sqrt{L}}{3}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot x^3}{L} + \frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot x = -\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot\left(\frac{\sqrt{L}}{3}\right)^3}{L} + \frac{1}{6}\cdot q\cdot L\cdot\frac{\sqrt{L}}{3}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot\frac{L^{\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}}}{27}}{L} + \frac{1}{6}\cdot q\cdot\frac{L^{1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}}{3} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{q\cdot L^{\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}}}{27} + \frac{1}{18}\cdot q\cdot L^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{162}\cdot q\cdot L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{18}\cdot q\cdot L^{\frac{3}{2}} = M_{MAX}$$