INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Otázky ke zkoušce z předmětu Numerické metody II

1. Klasická formulace okrajové úlohy

$$
\begin{aligned}
-a^2y'' + py' + qy = f \quad \text{in} \quad (0,l), \\
y(0) = \alpha_0, \quad -a^2y'(l) = \beta_l + \gamma_l y(l)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   a nejdůležitější fyzikální významy koeficientů i okrajových podmínek. Postačující podmínky pro existenci klasického řešení.

2. Množiny funkcí $PC\langle 0,l\rangle$, $PC^1\langle 0,l\rangle$, $L_2(0,l)$, $H^1(0,l)$ a jejich porovnání. Galerkinova (slabá) formulace úlohy (1) a její diskretizace MKP.

3. Lineární konečný prvek a algoritmus MKP v 1D.

4. Otevřená, uzavřená, souvislá množina, oblast, regulární oblast $\Omega \subset \Re^2$, množiny funkcí $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ a $H^2(\Omega)$, operátory ∇, div a Δ. Sobolevovy věty o vnoření, věta o stopách a Greenovy formule.

5. Formulujte rovnici vedení tepla v rovině v obecném tvaru, odvoďte rovnici vedení tepla pro nestlačitelné proudění a uveďte fyzikální významy koeficientů.

6. Uveďte klasickou a variační formulaci úlohy

$$
-\Delta u = f \quad \text{v} \quad \Omega, \quad u|_{\Gamma_D} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_N} = 0 \tag{2}
$$

   a charakterizujte podstatné a přirozené okrajové podmínky.

7. Triangulace polygonální oblasti $\Omega \subset \Re^2$, po částech lineární funkce, diskretizace variační formulace úlohy (2), matice tuhosti, její vlastnosti a vektor zatížení.

8. (Lagrangeův) lineární trojúhelníkový element ve 2D, referenční lineární trojúhelníkový element, jeho transformace na libovolný element $e = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}\mathbf{q}^{(m)}}$, výpočet plošného obsahu elementu e. Baze $N^{(j)}, N^{(k)}, N^{(m)}$ lokálního prostoru elementu e a gradienty funkcí $N^{(j)}, N^{(k)}, N^{(m)}$.

9. Algoritmus řešení úlohy (2) metodou konečných prvků.

10. Minimizační formulace úlohy (2).

11. Klasická formulace, odvození variační formulace okrajové úlohy

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(\lambda \nabla u) + \omega u = f \quad \mathrm{v} \quad \Omega \\ u|_{\Gamma_D} = g_0, \quad (\lambda \partial u/\partial \vec{n} + \alpha u)\,|_{\Gamma_N} = g_1 \end{aligned} \tag{3}$$

a nejdůležitější fyzikální významy koeficientů i okrajových podmínek.

12. Diskretizace variační formulace úlohy (3) a algoritmus sestavení matice tuhosti a vektoru zatížení.

13. Klasická a variační formulace úlohy

$$\begin{aligned} \partial u/\partial t - \mathrm{div}\,(\lambda \nabla u) + \omega u = f \quad \text{pro všechna} \ \ \mathbf{x} \in \Omega,\ t \in (0,T) \\ u|_{\Gamma_D} = g_0,\ (\lambda \partial u/\partial \vec{n} + \alpha u)\,|_{\Gamma_N} = g_1 \quad \text{pro všechna} \ \ t \in (0,T), \\ u(\mathbf{x},0) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna} \ \ \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{4}$$

14. Prostorová diskretizace variační úlohy (4).

15. Popište standardní způsoby časové diskretizace variační úlohy (4) a porovnejte jejich vlastnosti.

16. Popište známé fyzikální významy počáteční okrajové úlohy

$$\begin{aligned} \partial u/\partial t - \mathrm{div}\,(\lambda \nabla u) + \vec{v} \cdot \nabla u = f \quad \mathrm{v} \quad \Omega \times (0,T) \\ u|_{\Gamma_D} = g_0, \quad (\lambda \partial u/\partial \vec{n} + \alpha u)\,|_{\Gamma_N} = g_1 \quad \text{pro} \ \ t \in (0,T) \\ u(\mathbf{x},0) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \quad \mathrm{v} \quad \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{5}$$

a uveďte předpoklady. Vysvětlete Eulerovy a Lagrangeovy souřadnice a zjednodušte PDR (5) užitím metody charakteristik.

17. Odvoďte variační formulaci úlohy (5) a její časovou diskretizaci.

18. Popište prostorovou diskretizaci úlohy (5).

19. Popište Lagrangeovy kvadratické trojúhelníkové konečné elementy a použití izoparametrických Lagrangeových kvadratických trojúhelníkových konečných elementů za účelem přesnějšího pokrytí dané regulární oblasti triangulací.